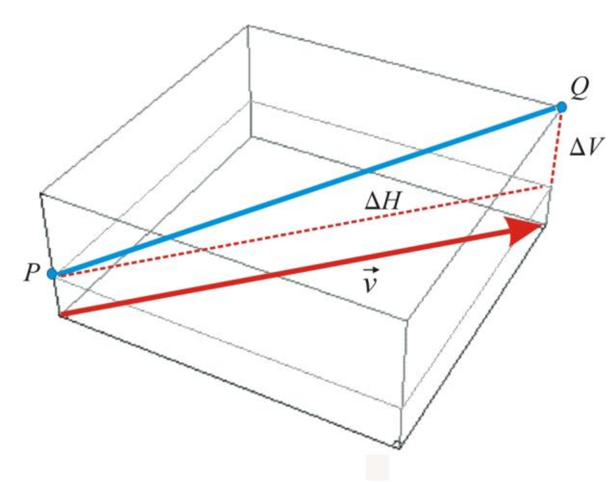
ACTIVIDAD #10 – DERIVADA DIRECCIONAL

Nombre:_____________________________________ Sección:_________________

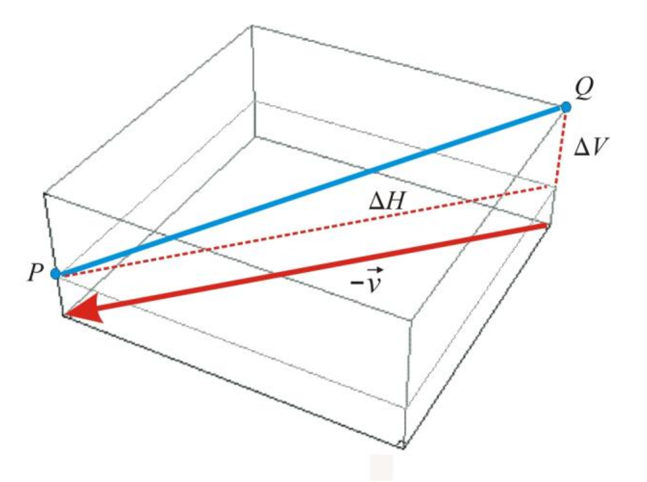
Una derivada direccional es una pendiente, así que se comienza definiendo lo que son pendientes en tres dimensiones.

Pendiente en una recta en 3D:

Dada una recta no vertical en el espacio se quiere obtener su pendiente como $\dfrac{\Delta V}{\Delta H} = \dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}$. Para ello se toman dos puntos, P y Q en la recta y se considera el segmento de recta $\overline{PQ}$. En la figura a continuación, observe que si el cambio vertical ΔV se computa de P a Q es positivo y si se computa de Q a P es negativo. Pero, el cambio horizontal ΔH se tiene que obtener como una distancia o magnitud de vector, por lo que siempre es positivo (esto es lo que lo que hace que las pendientes en tres dimensiones sean diferentes a las pendientes en dos dimensiones). Por lo tanto, ***las pendientes en tres dimensiones son pendientes dirigidas***, el signo depende si se computa de Q a P ó de P a Q. Para dar dirección a la recta se proyecta el segmento $\overline{PQ}$ sobre un plano horizontal y se escoge el vector $\vec{v}$ que corresponde a recorrer el segmento desde P hasta Q o el vector $-\vec{v}$ que corresponde a recorrer el segmento de Q a P (vea la figura). Luego se computa la pendiente como siempre:



De P a Q



De Q a P

La pendiente de la recta en dirección del vector $\vec{v}$ es

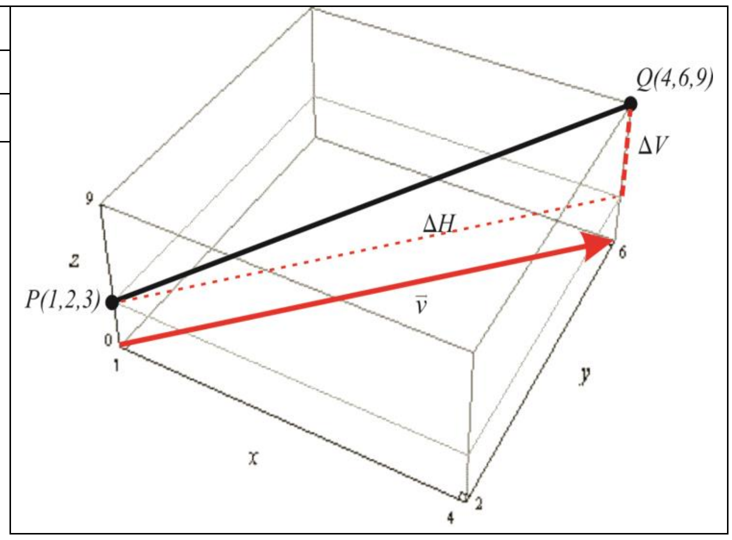
$$\frac{\Delta V}{\Delta H} = \frac{\text{cambio vertical de } P \text{ a } Q}{|\vec{v}\,|} \qquad \text{donde}$$

ΔV, el **cambio vertical** de P a Q es la coordenada z del punto final Q menos la coordenada z del punto inicial P.

ΔH **, el cambio horizontal** de P a Q es la magnitud del vector $\vec{v}$.

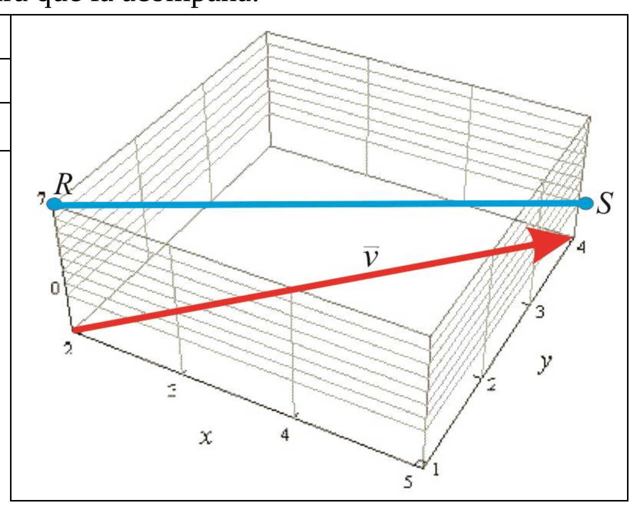
1. En este problema se computa la pendiente del segmento de recta $\overline{PQ}$, primero en dirección del vector $\vec{v}$ dado en la figura y luego en dirección del vector $-\vec{v}$. Si hace bien el problema una pendiente va a ser el negativo de la otra. Llene la tabla a continuación:

Dirección	ΔV	ΔH	pendiente
$\vec{v}$			
$-\vec{v}$			



2. Llene la tabla de abajo refiriéndose a la figura que la acompaña:

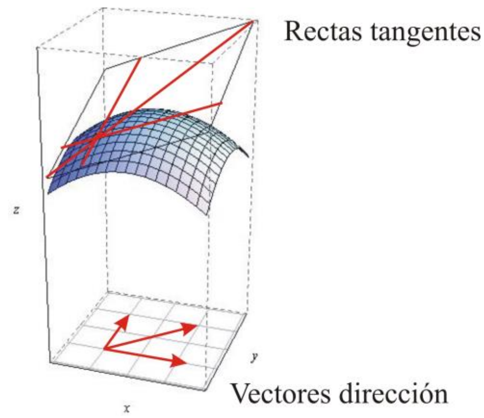
dirección	ΔV	ΔH	pendiente
$\vec{v}$			
$-\vec{v}$			



3. Reflexione sobre lo que hizo en los problemas 1 y 2.
   a. ¿Cuál es el efecto en la pendiente de una recta cuando se cambia la dirección $\vec{v}$ de la pendiente por la dirección opuesta $-\vec{v}$? ¿Por qué las pendientes en tres dimensiones tienen que ser pendientes dirigidas?
   b. ¿Cómo compara la pendiente de una recta (en 3D) en dirección de un vector $\vec{v}$ con la pendiente de la misma recta en dirección del vector $2\vec{v}$ o del vector $\frac{1}{2}\vec{v}$?
   c. Una derivada parcial de una función de dos variables es una pendiente de una recta tangente a la gráfica de la función en el espacio 3D y por lo tanto es una pendiente dirigida. ¿Cuál puede ser el vector dirección (recuerde que los vectores dirección tienen solo 2 coordenadas) en el caso de una parcial respecto a *x*? ¿En el caso de una parcial respecto a *y*?

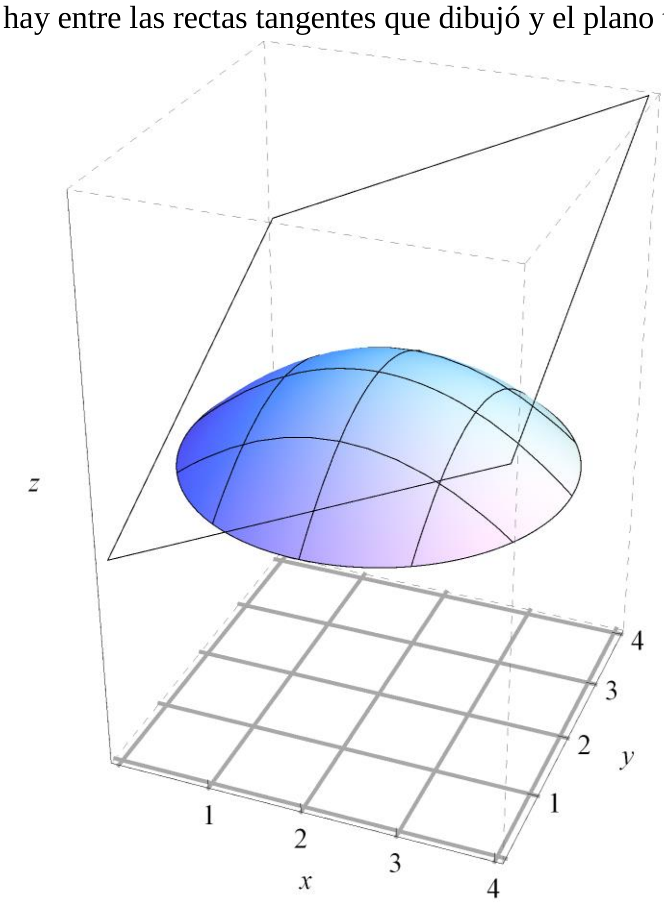
Localizar punto base, vector dirección, y rectas tangentes en plano tangente:

El **plano tangente** en un punto dado de una superficie, consiste de todas las rectas tangentes a la superficie en el punto dado en todas las direcciones posibles (vea la figura al lado).



4. La siguiente es la gráfica de $z = f(x, y)$ con su plano tangente en el punto $(1, 1, f(1, 1))$.

a. Localice el punto base $(1, 1, f(1, 1))$.
b. Represente los vectores dirección $\langle 0,-1\rangle$, $\langle 1,0\rangle$, y $\langle 1,1\rangle$ comenzando bajo el punto base en el plano horizontal inferior de la figura.
c. Para cada uno de los vectores dirección de la parte anterior, dibuje tan cuidadosamente como pueda un pedazo de curva en la superficie que esté en esa dirección, y la recta tangente a la superficie en el punto base en la dirección dada.
d. ¿Qué relación hay entre las rectas tangentes que dibujó y el plano tangente?



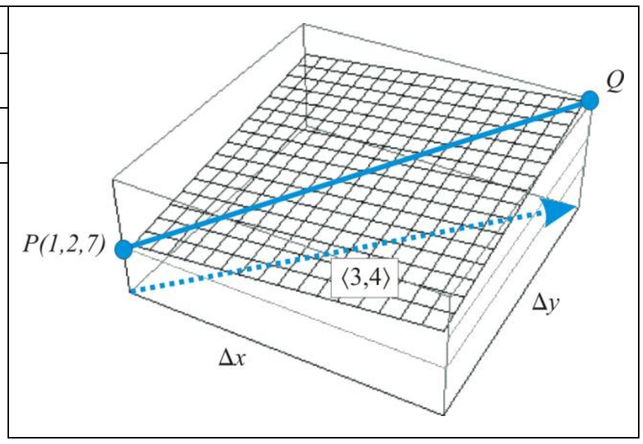
Pendiente de una recta en un plano:

En los siguientes problemas se sigue computando la pendiente de una recta en una dirección dada, lo único que la recta aparece ahora representada dentro de un plano. Esto permite usar el plano para hallar el cambio vertical. Recuerde que en un plano el cambio vertical de un punto P a un punto Q está dado por:

$$\begin{aligned} dz &= dz_x + dz_y \\ &= m_x dx + m_y dy \end{aligned}$$

5. Suponga que en el plano de la figura derecha de abajo $m_x = 5$ y $m_y = 6$.

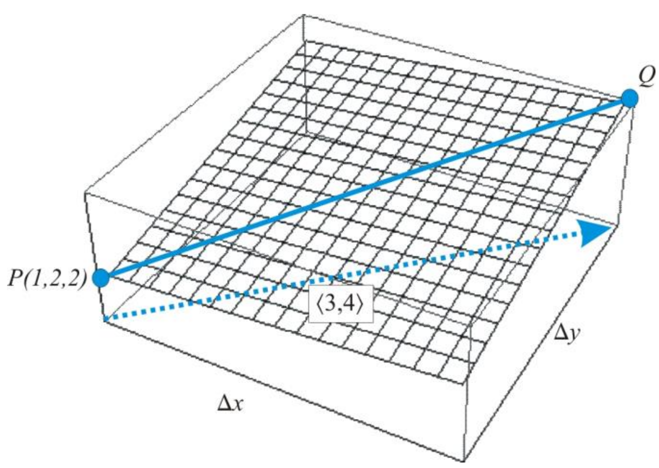
dirección	dx	dy	ΔV	ΔH	pendiente
$\langle 3,4\rangle$					
$\langle -3,-4\rangle$					



El siguiente problema es como el anterior, la única diferencia es que el plano es un plano tangente a la gráfica de la función y que por ende las pendientes se pueden computar como derivadas parciales de la función.

6. Sea $f(x,y) = x^2 y$. Observe que el punto $P(1,2,2)$ está en la gráfica de *f*. La figura de abajo representa el plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $P(1,2,2)$. El segmento $\overline{PQ}$ es tangente a la gráfica de *f* en el punto $P(1,2,2)$ en dirección del vector $\langle 3,4\rangle$. Su pendiente en dirección del vector $\langle 3,4\rangle$ es la derivada direccional de *f* en el punto $(1,2)$ y se denota $D_{\langle 3,4\rangle} f(1,2)$. En este problema se computa $D_{\langle 3,4\rangle} f(1,2)$. Llene la tabla a continuación:

dx	dy	ΔH	m_x	m_y	ΔV	$D_{\langle 3,4\rangle} f(1,2)$



Observe que se puede obtener **cambio vertical en el plano** tangente usando las derivadas parciales para computar $m_x dx + m_y dy$.

Derivada direccional:

La derivada direccional de de una función *f*, en un punto (a,b), en una dirección $\langle dx, dy\rangle$, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f*, en el punto $(a,b,f(a,b))$, en dirección del vector $\langle dx, dy\rangle$. Se denota $D_{\langle dx,dy\rangle} f(a,b)$.

7. Sea $f(x,y) = xy + x$. Observe que el punto $P(2,4,10)$ está en la gráfica de *f*. La figura a continuación representa el plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $P(2,4,10)$. En este problema se computa $D_{\langle 3,5\rangle} f(2,4)$.

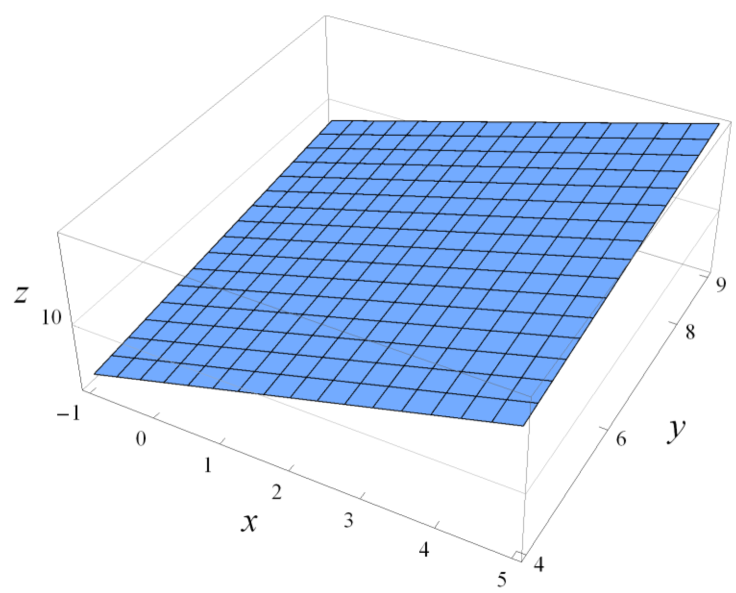
a. Represente el punto base $P(2,4,10)$ en la figura de abajo.

b. Represente el vector dirección $\langle 3,5\rangle$ en tres dimensiones como el vector $\langle 3,5,0\rangle$ comenzando bajo el punto base.

c. Dibuje la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $P(2,4,10)$. Esa recta es parte del plano tangente.

d. Llene la tabla a continuación para computar la pendiente de esa recta tangente en dirección $\langle 3,4\rangle$. Esa pendiente es $D_{\langle 3,4\rangle} f\left(2,4\right)$.

dx	dy	ΔH	m_x	m_y	ΔV	$D_{\langle 3,5\rangle} f\left(2,4\right)$



Observe que **una derivada direccional** de una función en un punto dado, **es una pendiente**: la pendiente de la recta que está en el plano tangente de la función en el punto dado y en la dirección dada por el vector. Por lo tanto, su cambio vertical se puede obtener como cambio vertical en un plano.

8. Reflexione sobre lo que hizo en el problema anterior y escriba una fórmula para la derivada direccional de una función *f* en un punto (*a*, *b*) en dirección de un vector $\langle dx, dy\rangle$, o sea, una fórmula para $D_{\langle dx,dy\rangle} f(a,b)$.

9. La siguiente es una tabla de valores de una función diferenciable *f* de dos variables. Aproxime lo mejor que pueda el valor de $D_{\langle 3,4\rangle} f(1,4)$.

y *x*	2	4	4.02	6	8
0	**5**	**7**	**7.04**	**10**	**11**
1	**6**	**10**	**10.02**	**8**	**9**
1.01	**6.03**	**9.96**	**9.94**	**9.05**	**9.10**
2	**10**	**8**	**7.80**	**7**	**8**
4	**11**	**8.50**	**8.01**	**6**	**5**

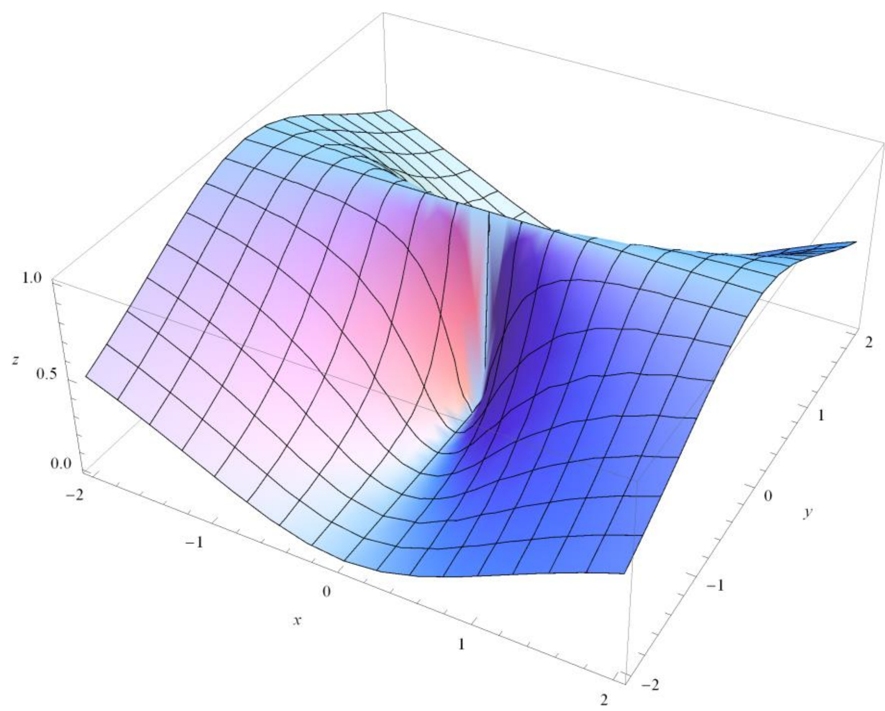
10. La siguiente es la gráfica de $z = f(x,y)$.

a. Primero represente en el plano *xy* de la figura de abajo el vector dirección $\langle -1,-1\rangle$ comenzando en el punto $(2,-1)$. Luego dibuje en la figura de abajo un pedazo de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $\left(2,-1, f\left(2,-1\right)\right)$ que está en dirección del vector dado. La pendiente de esa recta en dirección del vector $\langle -1,-1\rangle$ es la **derivada direccional** de *f* en el punto $(2,-1)$ en dirección del vector $\langle -1,-1\rangle$ y se denota $D_{\langle -1,-1\rangle} f(2,-1)$.

b. Indique cuál va a ser el signo de $D_{\langle -1,-1\rangle} f(2,-1)$ justificando brevemente su contestación.

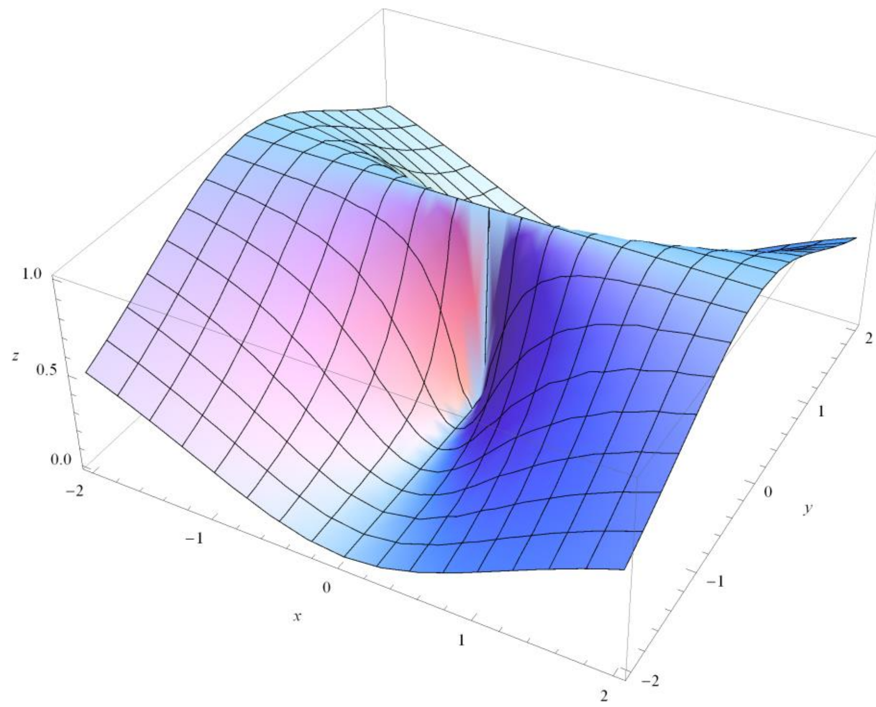
c. Ahora represente en el plano *xy* de la figura de abajo el vector dirección $\langle -\frac{1}{2},3\rangle$ comenzando en el punto $(2,-1)$. Luego dibuje en la figura de abajo un pedazo de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(2,-1, f(2,-1))$ que está en dirección del vector dado. La pendiente de esa recta en dirección del vector $\langle -\frac{1}{2},3\rangle$ es $D_{\langle -\frac{1}{2},3\rangle} f(2,-1)$, la derivada direccional de *f* en el punto $(2,-1)$ en dirección del vector $\langle -\frac{1}{2},3\rangle$.

d. Indique cuál va a ser el signo de $D_{\langle -\frac{1}{2},3\rangle} f(2,-1)$ justificando brevemente su contestación.



11. Sea *f* la función cuya gráfica aparece arriba. Para cada valor de *t*, el vector $\langle \cos t, \sin t\rangle$ es un vector dirección. El valor de $D(t) = D_{\langle \cos t, \sin t\rangle} f(1,-1)$ es un número.
    a. Discuta cómo se puede ver la gráfica de $y = D(t)$ para valores de *t* en $[0,2\pi]$.
    b. Discuta cómo se puede ver la gráfica de $y = G(t) = D_{\langle 1,1\rangle} f(t,-t)$ para valores de *t* en $(0,2]$.

12. Suponga que la gráfica de $z = f(x, y)$ es la que aparece a continuación. En este problema use argumentos geométricos para justificar sus contestaciones.
    a. Dibuje el segmento de recta que va desde $(1,-1, f(1,-1))$ hasta $(2,0, f(2,0))$. ¿Cómo compara (menor, igual, mayor) la pendiente de ese segmento de recta (en esa dirección) con $D_{\langle 1,1\rangle} f(1,-1)$?
    b. ¿Cómo compara $D_{\langle 1,1\rangle} f(1,-1)$ con $D_{\langle 0.01,0.01\rangle} f(1,-1)$? Explique.
    c. ¿Cuál es más cercano a $D_{\langle 1,1\rangle} f(1,-1)$, la pendiente del segmento de recta que va desde $(1,-1, f(1,-1))$ hasta $(2,0, f(2,0))$ o la el segmento de recta que va desde $(1,-1, f(1,-1))$ hasta $(1.01,-0.99, f(1.01,-0.99))$? Explique.



13. La gráfica de $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ aparece en la figura anterior.

a. Compute $D_{\langle -1,-1\rangle} f(2,-1)$. Verifique que su contestación concuerda con la del problema 10b.

b. Compute $D_{\langle -\frac{1}{2},3\rangle} f(2,-1)$. Verifique que su contestación concuerda con la del problema 10d.

c. Compute $D_{\langle a,b\rangle} f(2,-1)$.

d. Compute $D_{\langle -\frac{1}{2},3\rangle} f(1,2)$.

e. Compute $D_{\langle -\frac{1}{2},3\rangle} f(a,b)$.