ACTIVIDAD #12 – VALORES MAXIMOS Y MINIMOS

Nombre:______________________________________

Máximos y mínimos de funciones de una variable:

1. Un teorema del cálculo dice que una función *continua* de una variable que esté definida en un intervalo *cerrado y acotado*, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en ese intervalo. ¿En cuáles de los siguientes casos el teorema nos permite concluir (sin hacer ningún cómputo) que la función tiene un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo dado?

   a. $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ en $[-1,2.9]$

   b. $g(x)=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ en $[0,4]$

   c. $h(x)=x^3-6x^2+9x+6$ en $[0.5,\infty)$

   d. $p(x)=x$ en $[1,4)$

   e. $r(x)=10-5|x-2|$ en $[1,3]$

   f. $q(x)=\tan x$ en $(-\pi/2,\pi/2)$

2. Para cada una de las funciones que aparece a continuación:
   i. Halle los puntos críticos en el interior de su dominio (dentro del intervalo) y evalúe la función en los puntos críticos. (Puntos críticos de una función de una variable son los valores de *x* para los cuales $f'(x)=0$ ó $f'(x)$ no existe).
   ii. Evalúe la función en la frontera de su dominio (las esquinas del intervalo).
   iii. Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función en su dominio.

   a. $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ en $[-1,2.9]$

   b. $f(x)=x^3-11x^2+35x-15$ en $[0,7]$

   c. $f(x)=x^3-6x^2+9x+6$ en $[0.5,3.5]$

3. Si posible, halle el valor máximo y mínimo de cada una de las siguientes funciones en el intervalo dado:

   a. $f(x)=x$ en $[1,4)$.

   b. $f(x)=\tan^{-1}x$ en $(-\infty,\infty)$

Máximos y mínimos de funciones de dos variables:

Definiciones: Sea *D* es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

- La **frontera** de *D* consiste de todos los puntos (x,y) tal que toda bola alrededor del punto contiene puntos que están en el conjunto *D* y puntos que no están en el conjunto *D*.
- *D* es **cerrado** si contiene todos los puntos de su frontera.
- *D* es **acotado** si es de extensión finita.

4. Cada uno de los siguientes conjuntos es el dominio de una función de dos variables. Represéntelo en el espacio tres dimensional como se representa el dominio de una función y pinte de otro color los puntos de la frontera del conjunto que están incluidos en el conjunto. Indique si el conjunto es cerrado. Indique si el conjunto es acotado.

   a. $\{(x,y)|-1\le x\le 4,-2\le y\le 2.9\}$

   b. $\{(x,y)|-1< x\le 4,-2\le y< 4\}$

   c. $\{(x,y)|2\le x,0\le y\le 5\}$

   d. $\{(x,y)|0\le x\}$

5. Un teorema del cálculo dice que una función *continua* de dos variables que esté definida en un conjunto *cerrado y acotado*, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en ese conjunto. ¿En cuáles de los siguientes casos el teorema nos permite concluir (sin hacer ningún cómputo) que la función tiene un valor máximo y un valor mínimo en el conjunto dado?
   a. $f(x,y)=\dfrac{1}{(x+2)(y-3)}$ en $\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 4, -2\le y\le 2.9\}$
   b. $h(x,y)=x^3y-6x^2y^2+9xy^3-6y^4$ en $\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 4, -2\le y<4\}$
   c. $p(x,y)=xy^2$ en $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 1\}$

6. Sea $f(x,y)=x^2+y^2$ con dominio restringido a la región acotada por las rectas $y=-1$, $x=2$, y $y-x=2$.
   a. Represente el dominio de la función en el plano Cartesiano (2 dimensiones), usando otro color para representar los puntos en la frontera del dominio.
   b. Halle todos los puntos críticos de *f* que están en *el interior* de su dominio y evalúe la función en los puntos críticos.
   c. Considere el componente de la frontera con ecuación $y=-1$.
      - Use la ecuación del componente de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo.
      - Evalúe la función de una variable resultante en:
         - Puntos críticos dentro del intervalo
         - Esquinas del intervalo
   d. Considere el componente de la frontera con ecuación $x=2$.
      - Use la ecuación del componente de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo.
      - Evalúe la función de una variable resultante en:
         - Puntos críticos dentro del intervalo
         - Esquinas del intervalo
   e. Considere el componente de la frontera con ecuación $y-x=2$.
      - Use la ecuación del componente de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo.
      - Evalúe la función de una variable resultante en:
         - Puntos críticos dentro del intervalo
         - Esquinas del intervalo
   f. Use la información que halló en las partes anteriores para hallar el valor máximo y el valor mínimo de *f* en todo su dominio y los puntos donde se alcanzan.

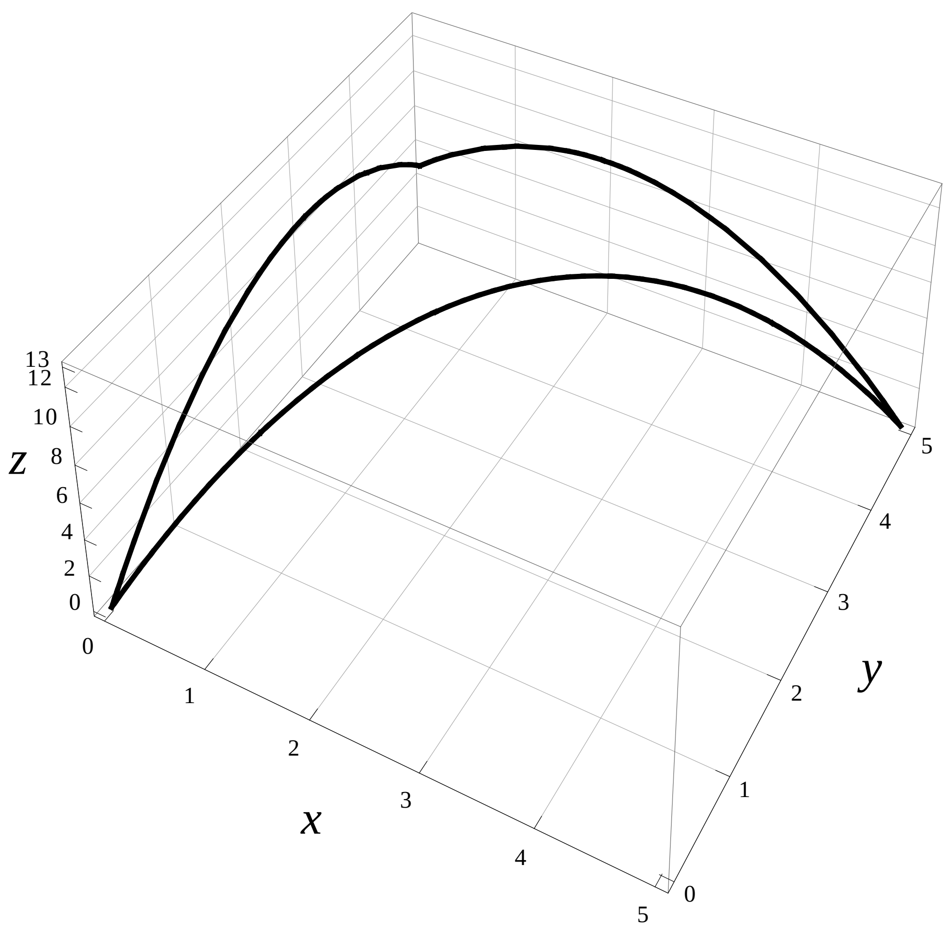
7. Sea $f(x,y)=4x+6y-x^2-y^2$. Suponga que *f* tiene el dominio restringido a la región $D=\{(x,y): y\ge x, x\ge 0, y\le 5\}$.
   a. Represente el dominio de la función en el plano Cartesiano (2 dimensiones), usando otro color para representar los puntos en la frontera del dominio.
   b. Halle todos los puntos críticos de *f* que están en *el interior* de su dominio y evalúe la función en los puntos críticos.
   c. Considere el componente de la frontera con ecuación $y=x$.
      - Use la ecuación del componente de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo.
      - Evalúe la función de una variable resultante en:
         - Puntos críticos dentro del intervalo
         - Esquinas del intervalo

d. Considere el componente de la frontera con ecuación $x = 0$.
  - Use la ecuación del componente de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo.
  - Evalúe la función de una variable resultante en:
    - Puntos críticos dentro del intervalo
    - Esquinas del intervalo

e. Considere el componente de la frontera con ecuación $y = 5$.
  - Use la ecuación del componente de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo.
  - Evalúe la función de una variable resultante en:
    - Puntos críticos dentro del intervalo
    - Esquinas del intervalo

f. Use la información que halló en las partes anteriores para hallar el valor máximo y el valor mínimo de *f* en todo su dominio y los puntos donde se alcanzan.

g. Abajo se muestran las tres curvas que están sobre la frontera del dominio de *f* en la gráfica de *f*. Marque y rotule en la figura todos los puntos correspondientes a los valores que halló en las partes anteriores.



8. Sea $f(x, y) = 2x^3 + y^4$ con dominio restringido a $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a. Represente el dominio de la función en el plano Cartesiano (2 dimensiones), usando otro color para representar los puntos en la frontera del dominio.

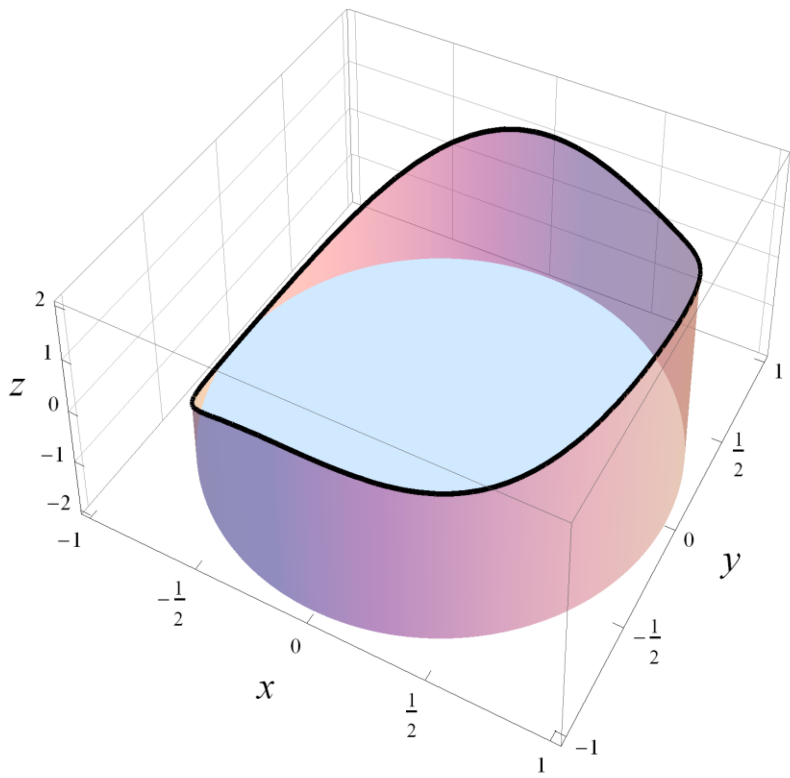
b. Halle todos los puntos críticos de *f* que están en *el interior* de su dominio y evalúe la función en los puntos críticos.

c. Use la ecuación de la frontera para expresar a *f* como una función de una variable definida en un intervalo cerrado y acotado. Indique cuál es la función y cuál es el intervalo. (Sugerencia: sustituya $y^2 = 1 - x^2$ en la fórmula para *f*)

d. Evalúe la función de una variable resultante en:
  - Puntos críticos dentro del intervalo
  - Esquinas del intervalo

e. La figura de abajo contiene la porción de la gráfica de *f* que está sobre la frontera del dominio de *f*. Marque en la figura y rotule con sus coordenadas todos los puntos en la gráfica de *f* que corresponden a los máximos y mínimos que halló en la parte anterior. Mirando la figura se sabe que debe haber hallado seis extremos locales.

f. Use la información que halló en las partes anteriores para hallar el valor máximo y el valor mínimo de *f* en todo su dominio y los puntos donde se alcanzan.



9. Sea $f(x,y)=x^2+y$ con dominio restringido a $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$.

a. Halle todos los puntos críticos de *f* que están en *el interior* de *D* y evalúe la función en los puntos críticos que halló.

b. Halle los extremos locales y puntos donde se alcanzan de la función *f* en *la frontera* de la región *D*, o sea, en los puntos de *D* donde $x^2+y^2=1$.

c. Marque en la figura de abajo y rotule con sus coordenadas todos los puntos que halló en las partes anteriores. Mirando la figura se puede ver que deben ser cuatro puntos.

d. Halle el valor máximo y el valor mínimo de *f* en toda la región *D* y los puntos donde se alcanzan.