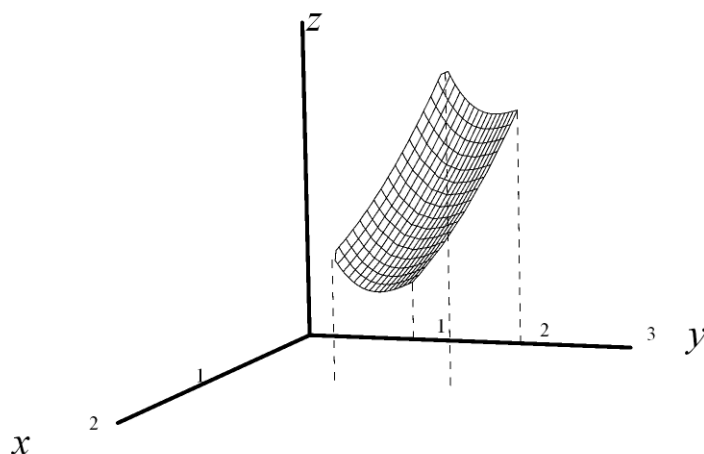


ACTIVIDAD #14 – SUMAS DE RIEMANN

Nombre: _____

1. Se define $f(x, y) = x^2y$ con dominio restringido al rectángulo $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$.
 - a. Represente (con un dibujo) el dominio de f en el espacio tres-dimensional. [Sugerencia: Recuerde que un par ordenado (x, y) en el dominio se representa en el espacio como $(x, y, 0)$].
 - b. Dibuje la gráfica de f (recuerde que f solo está definida en el rectángulo; es conveniente dibujar primero la parte que queda sobre la frontera del rectángulo).

2. La gráfica de $f(x, y) = x^3 + y^2$ con dominio restringido al rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ aparece a continuación. Se toma una partición de R que consiste de solamente ese rectángulo.
 - a. Compute $f(0, 1)\Delta x \Delta y$. Si hacer ningún otro cómputo decida si esto es un subestimado o un sobrestimado del volumen bajo la gráfica y sobre el rectángulo. Use un argumento geométrico para explicar su contestación. [Sugerencia: $f(0, 1)\Delta x \Delta y$ es el volumen de una caja rectangular.]
 - b. Compute $f(1, 2)\Delta x \Delta y$. Si hacer ningún otro cómputo decida si esto es un subestimado o un sobrestimado del volumen bajo la gráfica y sobre el rectángulo. Use un argumento geométrico para explicar su contestación.
 - c. Sin hacer ningún cómputo, use un argumento geométrico para explicar por qué tiene que haber un punto (a, b) en el rectángulo R tal que $f(a, b)\Delta x \Delta y$ es igual al volumen bajo la gráfica y sobre el rectángulo.
 - d. Se sabe que el volumen bajo la gráfica de f y sobre el plano xy es exactamente $31/12$. Halle un punto (a, b) tal que $f(a, b)\Delta x \Delta y$ es igual a ese volumen.
 - e. Si x se mide en centímetros, y se mide en centímetros, y $f(x, y)$ se mide en centímetros, ¿Qué unidades tiene $\iint_R f(x, y) dA$? [Sugerencia: piense en la suma de Riemann de donde viene la integral.]
 - f. Si x se mide en centímetros, y se mide en centímetros, y $f(x, y)$ tiene unidades de miligramos de plomo por centímetro cuadrado, ¿Qué unidades tiene $\iint_R f(x, y) dA$?



3. En este problema se particiona el rectángulo $[1, 7] \times [0, 12] = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq 12\}$ y se representa gráficamente la partición en el espacio tres-dimensional (en el plano xy). Esto se logra particionando el intervalo $[1, 7]$ en m subintervalos de igual longitud y $[0, 12]$ en n subintervalos de igual longitud.
 - a. Represente gráficamente (en 3D) la partición si $m = 2$ y $n = 3$. Halle Δx y Δy .
 - b. Represente gráficamente (en 3D) la partición si $m = 3$ y $n = 5$. Halle Δx y Δy .

4. Una función continua $z = f(x, y)$ definida en el rectángulo $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$ tiene los valores en la siguiente tabla:

	x=0	x=2	x=4
y=0	5	3	3
y=2	4	2	3
y=4	3	2	-1

- a. Para aproximar el volumen entre la gráfica de f y el plano xy , se forma una suma de Riemann usando dos subdivisiones para x , dos para y y el valor más pequeño de cada variable en cada subrectángulo de la subdivisión para computar la altura como $f(x_i, y_j)$. Halle x_1, x_2, y_1, y_2 y úselos para llenar la siguiente tabla:

subrectángulo	Largo Δx del subrectángulo	Ancho Δy del subrectángulo	Altura	Volumen de caja rectangular
1				
2				
3				
4				

- b. Represente en el espacio tres-dimensional las cuatro cajas rectangulares cuyo volumen computó en la parte anterior.
- c. Halle el valor numérico del volumen aproximado que hay bajo la gráfica de f y sobre el plano xy .
- d. Halle el valor numérico del volumen¹ aproximado si usa el valor más grande de cada variable en cada subrectángulo.
- e. Represente en el espacio tres-dimensional las cuatro cajas rectangulares cuyo “volumen” computó en la parte anterior.
- f. Llene la tabla a continuación usando los símbolos $x_1, x_2, y_1, y_2, \Delta x, \Delta y, f$ en vez de valores numéricos.

subrectángulo	Largo Δx del subrectángulo	Ancho Δy del subrectángulo	Altura	Volumen de caja rectangular
1				
2				
3				
4				

- g. Expresé el volumen aproximado como la suma de cuatro términos usando solamente las variables $x_1, x_2, y_1, y_2, \Delta x, \Delta y, f$.
- h. Expresé la suma de Riemann de la parte anterior como una doble suma $\sum \sum$ usando la notación sigma y los símbolos $x_1, x_2, y_1, y_2, \Delta x, \Delta y, f$. Muestre todo su trabajo².

¹ Si el valor de la función es negativo, o sea, si la cajita queda bajo el plano xy , entonces el término correspondiente $f(x_i, y_j)\Delta x\Delta y$ es negativo. Este número es el negativo del volumen de la cajita. En general, el “volumen” de una región bajo el plano xy se trata como negativo.

² Por ejemplo: para simplificar:
 $f(x_1, y_1)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_1)\Delta x\Delta y + f(x_1, y_2)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_2)\Delta x\Delta y + f(x_1, y_3)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_3)\Delta x\Delta y + f(x_1, y_4)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_4)\Delta x\Delta y$
 Observe:
 $\underbrace{f(x_1, y_1)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_1)\Delta x\Delta y}_{x \text{ cambia}} + \underbrace{f(x_1, y_2)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_2)\Delta x\Delta y}_{x \text{ cambia}} + \underbrace{f(x_1, y_3)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_3)\Delta x\Delta y}_{x \text{ cambia}} + \underbrace{f(x_1, y_4)\Delta x\Delta y + f(x_2, y_4)\Delta x\Delta y}_{x \text{ cambia}}$
 $= \underbrace{\sum_{i=1}^2 f(x_i, y_1)\Delta x\Delta y + \sum_{i=1}^2 f(x_i, y_2)\Delta x\Delta y + \sum_{i=1}^2 f(x_i, y_3)\Delta x\Delta y + \sum_{i=1}^2 f(x_i, y_4)\Delta x\Delta y}_{y \text{ cambia}}$
 $= \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^2 f(x_i, y_j)\Delta x\Delta y \right)$

5. La densidad poblacional (en número de ranas por kilómetro cuadrado) de una especie de rana en una región D de 32 km^2 se modela con la función $f(x, y) = xy + x$ donde x, y están en kilómetros y $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$. Se forma una suma de Riemann usando $\Delta x = 2$, $\Delta y = 2$ y el punto medio de cada subrectángulo para aproximar la densidad en el subrectángulo.

a. Llene la siguiente tabla con valores numéricos:

subrectángulo	Largo del subrectángulo	Ancho del subrectángulo	Densidad	Número de ranas
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

b. Según la suma de Riemann, ¿aproximadamente cuántas ranas hay en la región?

c. Llene la tabla a continuación usando los símbolos $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, \Delta x, \Delta y$ en vez de valores numéricos.

subrectángulo	Largo del subrectángulo	Ancho del subrectángulo	Densidad	Número de ranas
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

d. Exprese el número aproximado de ranas como una doble suma $\sum \sum$ usando la notación sigma y los símbolos $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, \Delta x, \Delta y$. Muestre todo su trabajo.

e. Generalice su trabajo en la parte anterior para expresar el número exacto de ranas como un límite de sumas de Riemann y déjelo así expresado.

f. Exprese este límite como una integral doble y compute el número exacto de ranas que predice el modelo.