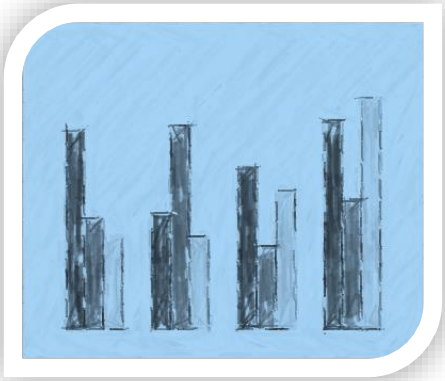
Lanzamiento de un dado corriente



Análisis de Datos y Probabilidad

Grado 9-12

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)

Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/

Introducción

En esta actividad los estudiantes aprenderán a estimar la probabilidad de un evento usando un experimento aleatorio (probabilidad empírica) y explicarán qué sucede con la probabilidad empírica del evento cuando el número de repeticiones del experimento incrementa considerablemente.

Objetivos de Aprendizaje

Luego de finalizar la actividad, el estudiante será capaz de:

- C-examinar la importancia del tamaño de muestra cuando se estima una probabilidad.
- P-estimar la probabilidad de obtener un número par usando una simulación.
- A-explorar el uso de simulación para resolver problemas.

Estándares y Expectativas (*PR Common Core*)

Estándar de Contenido: **Análisis de Datos y Probabilidades**

(+) 9.E.14.1 Define una variable aleatoria para una cantidad de interés, asignándole un valor numérico a cada evento de un espacio muestral; grafica la distribución de probabilidad correspondiente con las mismas imágenes gráficas usadas para la distribución de datos.

(+) 9.E.14.4 Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida para un espacio muestral en el que las probabilidades están asignadas empíricamente; halla el valor esperado (ejemplo: Halla la distribución actual de datos para el número de televisores por hogar en Estados Unidos, y calcula el número esperado de televisores por hogar. ¿Cuántos televisores esperaríamos encontrar en 100 hogares escogidos al azar?).

(+) 9.E.16.2 Resume datos de una simulación al usar los resúmenes numéricos y las gráficas apropiadas; desarrolla un estimado para la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística de la vida diaria y discute el efecto de un número de intentos en la probabilidad estimada de un evento.

ES.E.42.2 Reconoce que la media de la muestra tiende a acercarse a la media de la población a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Materiales

- Un dado corriente.
- Calculadora.
- Plantilla de la actividad.

Tiempo Estimado: 50 minutos.

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)

Este material se distribuye gratuitamente para uso en los salones de clase. Su venta está prohibida. Su desarrollo fue posible gracias al apoyo de la *American Statistical Association (ASA),* Capítulo de Puerto Rico de la ASA y el proyecto AFAMaC-Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez.

Disponible en la página web: http://pegasus.uprm.edu/~pedro.torres/RepASA

Actividad

La probabilidad de que un recién nacido sea fémina en Puerto Rico es aproximadamente 0.5. Es decir, cerca del 50% de los recién nacidos en la isla son féminas. Vamos a jugar a determinar el sexo de un recién nacido lanzando un dado. Si el resultado del dado es par, entonces el recién nacido es fémina, de lo contrario, el recién nacido es varón. Dígales a los estudiantes que se organicen en grupos de dos (organice a sus estudiantes en grupos de dos). Uno de ellos será el anotador mientras que el otro hará los lanzamientos del dado. Distribuya una copia de la actividad "Lanzamiento de un dado". Coméntele a los estudiantes que vamos a simular qué sexo tendría un recién nacido usando el lanzamiento de un dado corriente.

Una forma de lanzar dados virtualmente es visitando la siguiente página web: www.random.org/dice/ . Allí podrá simular el lanzamiento de hasta 60 dados simultáneamente.

Fuente: http://www.wauwsieraden.nl/

Alternativamente, puede pedirles a los estudiantes que bajen una aplicación para simular el lanzamiento de datos. Por ejemplo, **Natural 20 Lite** para iPhone o **Dice Roller** en Android. Busque más aplicaciones con las palabras claves "**Dice Roller**".

Discusión

1. Lance un dado 30 veces y escriba los resultados en la siguiente tabla.

   La Tabla 1 muestra los resultados que se obtuvieron al lanzar virtualmente un dado utilizando la página de internet: www.random.org. Durante la clase puede usar dados o recurrir a la tecnología usando una aplicación de un teléfono inteligente o una página web. En cualquier caso, los estudiantes deberán registrar los resultados de los 30 lanzamientos. En esta parte aproveche para discutir la idea de aleatoriedad. Este experimento de lanzar un dado se considera un experimento aleatorio. Por ejemplo, pregunte si se obtendrían los mismos resultados si lanzamos nuevamente el dado 30 veces. En algún momento, sería interesante que los estudiantes compararan los resultados entre grupos.

Tabla 1. Resultados en 30 lanzamientos de un dado corriente.

Lanz.	Número observado	Lanz.	Número observado	Lanz.	Número observado
1	3	**11**	6	**21**	5
2	2	**12**	1	**22**	4
3	6	**13**	3	**23**	6
4	6	**14**	3	**24**	5
5	1	**15**	2	**25**	5
6	4	**16**	2	**26**	6
7	3	**17**	4	**27**	1
8	4	**18**	3	**28**	2
9	6	**19**	6	**29**	4
10	1	**20**	4	**30**	2

2. Usando los resultados de la parte 1), ¿qué porciento de sus lanzamientos resultó en un número par?

De un total de 30 lanzamientos, 18 resultaron ser números pares. Dividiendo la cantidad de resultados pares entre la cantidad total de lanzamientos se tiene que $18/30 = 0.6$. Para convertir esta cantidad a porciento hay que multiplicar el resultado por 100. Por lo tanto, el porciento de lanzamientos que resultó en un número par es 60%. Es decir, la probabilidad empírica de obtener un número par es 0.6. Podemos decirle al estudiante que este experimento se puede visualizar como si observáramos el sexo de 30 recién nacidos. Es decir, simulamos el sexo de 30 recién nacidos. Si el dado resulta en par entonces el recién nacido es una fémina. De lo contrario, si el resultado del dado es impar entonces es un varón. En nuestro experimento obtuvimos 60% de féminas.

3. Recopile la información de otros cuatro grupos en el salón de clase. Escriba la información en la siguiente tabla.

La Tabla 2 muestra la información resumida de cinco grupos. Note que ahora tenemos 150 lanzamientos en total.

Tabla 2. Resultados del número de pares en cinco grupos (incluyendo mi grupo).

Grupo	# de lanzamientos	# de pares
Mi grupo	30	18
Grupo 1	30	14
Grupo 2	30	15
Grupo 3	30	14
Grupo 4	30	16
Total	**150**	**77**

4. ¿Qué porciento de los lanzamientos resultó en un número par cuando usa la información de los cinco grupos, es decir, de 150 lanzamientos? Compare este valor con el obtenido en la parte 2).

Siguiendo los pasos que se utilizaron en la parte 2) y los datos de la Tabla 2, se tiene que el porciento de lanzamientos que resultaron en un número par es de $(75/150) \times 100 = 51.3\%$. Es decir, la probabilidad empírica de obtener un número par es 0.513. En la parte 2) se obtuvo una probabilidad empírica de 0.60, un poco mayor que la estimación anterior. Pregunte ¿cuál de las dos cantidades usaría usted para estimar la probabilidad de obtener un número par? Explore el porqué de las respuestas. Vuelva a mencionar la idea de que simulamos 150 nacimientos y el 51.3% de estos fueron féminas (pares).

Un **experimento es aleatorio** si no se puede determinar de antemano su resultado. Es decir, un experimento es aleatorio si produce resultados diferentes cuando se repite bajo las mismas condiciones. De otro lado, decimos que un **experimento es determinístico** si se conoce de antemano su resultado cuando se repite bajo las mismas circunstancias.

Espacio muestral: En un experimento aleatorio el espacio muestral consiste de todos los posibles resultados del experimento. Por ejemplo, en el lanzamiento de dos dados corrientes los posibles resultados son 36: {(1,1), (1,2),(1,3), (1,4), …, (5,6), (6,6)}.

Probabilidad teórica de un evento A: En un espacio muestral donde todos los resultados son igualmente probables se define como el cociente entre el número de formas que puede ocurrir A sobre el total de resultados posibles en el espacio muestral. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda corriente la probabilidad teórica de cruz es 0.5 o 50%. En el caso del lanzamiento de los dos dados, la probabilidad de obtener dobles es 6/36 = 1/6.

Probabilidad empírica de un evento A: También se conoce como frecuencia relativa o probabilidad experimental. Es el cociente entre el número de veces que ocurre el evento A sobre el total de repeticiones del experimento. Por ejemplo, si lanzo una moneda corriente 100 veces y obtengo 55 cruces entonces la probabilidad empírica de cruz es igual a 55/100 = 0.55 o 55%.

La probabilidad es siempre un número entre 0 y 1. Si se expresa como porciento entonces es un número entre 0% y 100%.

5. Complete la siguiente tabla usando la información de la Tabla 2 de la parte 4) y la información de cuatro grupos más. ¿Qué porciento de los lanzamientos resultó en un número par cuando usa la información de los nueve grupos, es decir, de 270 lanzamientos? Compare este valor con el obtenido en la parte 2).

Grupo	# de lanzamientos	# de pares
Total	**270**	137

El porciento de lanzamientos que resultaron en un número par es de $(137/270) \times 100 = 50.7\%$. Es decir, la probabilidad empírica de obtener un número par es 0.507. En la parte 2) se obtuvo una probabilidad empírica de 0.60, mayor que la estimación anterior. Pregunte ¿cuál de las dos cantidades usaría usted para estimar la probabilidad de obtener un número par? Explore el porqué de las respuestas. Vuelva a mencionar la idea de que simulamos 270 nacimientos y el 50.7% de estos fueron féminas (pares).

6. Complete la siguiente tabla.

La Tabla 3 muestra los resultados obtenidos en el ejercicio 2), 4) y 5). Para calcular la probabilidad teórica de obtener un número par proceda de la siguiente manera. Un dado común tiene seis caras {1, 2, 3, 4, 5, 6}, cada una con igual probabilidad de salir (equiprobables). Es decir, el espacio muestral en el lanzamiento de un dado corriente es {1, 2, 3, 4, 5, 6}. De las seis caras, tres números son pares {2, 4, 6}. Por lo tanto, la **probabilidad teórica** de obtener un número par es $3/6 = 0.5$. En términos de porciento, esta probabilidad es igual a 50%.

Tabla 3. Probabilidad empírica bajo diferentes escenarios y probabilidad teórica de obtener un número par.

Escenario	Probabilidad de obtener un número par (%)
30 lanzamientos (ejercicio 2)	60.0%
150 lanzamientos (ejercicio 4)	51.3%
270 lanzamientos (ejercicio 5)	50.7%
Probabilidad teórica	50.0%

7. ¿Qué pasaría con la probabilidad empírica si lanzo el dado un número grande veces, por ejemplo, 10,000 veces?

Uno esperaría que la probabilidad empírica sea cercana a 0.50, el valor de la probabilidad teórica de obtener un número par en el lanzamiento de un dado. En conclusión, la probabilidad estimada (empírica) de observar un número par en el lanzamiento de un dado se acerca más a la probabilidad teórica cuando el tamaño de muestra aumenta considerablemente. Este resultado se conoce como la **Ley Débil de los Números Grandes**. Este resultado es muy importante ya que para poder estimar alguna cantidad

La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta es una lista de los posibles valores que toma la variable con sus respectivas probabilidades. Por ejemplo, para la variable aleatoria *X="Resultado en el lanzamiento de una moneda corriente"*, la distribución de probabilidad está dada por:

Resultado	Probabilidad
Cara	0.5 o 50%
Cruz	0.5 o 50%
Suma	**1.0 o 100%**

Recuerde que la probabilidad se puede expresar como un número entre 0 y 1 (proporción) o un porciento.

Ley Débil de los Números Grandes: Esta ley nos dice que la probabilidad empírica o experimental de un evento A se aproxima a la probabilidad teórica del evento cuando el número de repeticiones del experimento incrementa considerablemente.

Fuente: http://www.shmoop.com/

"Es una verdad muy cierta que, cuando no esté a nuestro alcance determinar lo que es verdad, deberemos seguir lo que es más probable". (Descartes)

de interés se debe tener una muestra aleatoria considerablemente grande para poder disminuir la incertidumbre de mi estimación. De lo contrario, mis resultados tendrán más incertidumbre. Esta ley es importante en la práctica ya que nos dice que la toma de decisiones se debería llevar a cabo con suficiente información. Es común escuchar a las personas que generalizan con base en experiencias o anécdotas de un solo individuo. Este tipo de generalizaciones deberían ser cuestionables debido a su alto grado de incertidumbre.

8. Use los resultados de la parte 1) para completar la siguiente tabla. Redondee los porcientos a una cifra decimal. Construya una gráfica de la distribución de probabilidad estimada para el número que se obtiene al lanzar un dado.

La Tabla 4 muestra las probabilidades empíricas en porciento de obtener un número par en 30 lanzamientos de un dado.

Tabla 4. Probabilidades estimadas para el resultado en los 30 lanzamientos de un dado.

Número observado	Porciento
1	$\frac{4}{30} \times 100 = 13.3\%$
2	$\frac{5}{30} \times 100 = 16.7\%$
3	$\frac{5}{30} \times 100 = 16.7\%$
4	$\frac{6}{30} \times 100 = 20.0\%$
5	$\frac{3}{30} \times 100 = 10.0\%$
6	$\frac{7}{30} \times 100 = 23.3\%$
Total	**100%**

No olvide agregar los títulos y etiquetas a los ejes de la gráfica. Escoja el tipo de gráfica que crea más conveniente para representar los datos en este problema.

Contando la cantidad de 1's que hay en la parte 1), se tiene que hay 4. Dividiendo entre la cantidad total de datos y multiplicando por 100, se tiene que aproximadamente el 13.3% de los datos fueron 1's. Los porcientos de los demás números observados se calculan de manera similar. Use Excel o pida a los estudiantes que hagan la gráfica a mano, pero no olvide hacer énfasis en las unidades y títulos de la gráfica. Además, es posible que resulten diferentes tipos de gráfica. Discuta la ventaja o desventaja de usar cada tipo de gráfica. En este caso la Figura 1 muestra las probabilidades empíricas obtenidas con los datos del experimento usando una gráfica de barras.

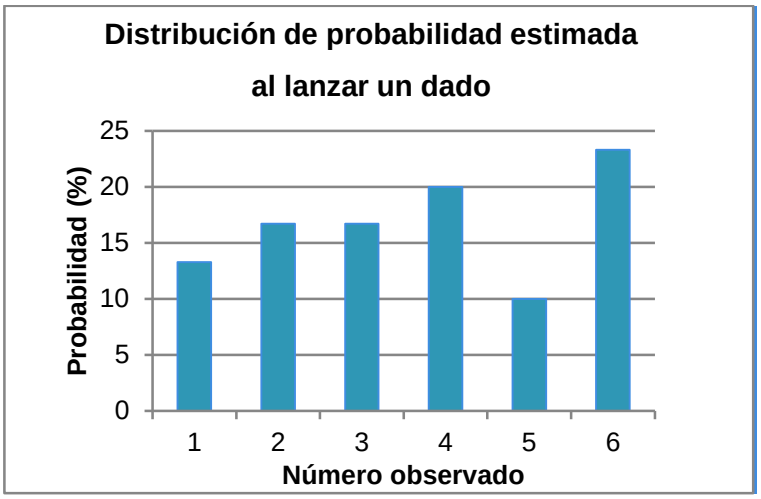


Figura 1. Probabilidad estimada de 1, 2, 3, 4, 5 o 6 en 30 lanzamientos de un dado corriente.

La probabilidad teórica de obtener 1 en el lanzamiento de un dado es igual a $1/6$ o aproximadamente 16.7%. De la misma manera sucede para 2, 3, 4, 5 o 6.

9. ¿Cómo cree que cambiaría la gráfica anterior (ejercicio 5) si se construyera a partir de la tabla que incluye los datos de toda la clase?

Si se construyera a partir de la tabla que incluye los datos de toda la clase, las probabilidades de los números observados deberían ser muy parecidos. Si usáramos un número grande de lanzamientos, entonces los probabilidad de observar 1, 2, 3, 4, 5 o 6 serían todas cercanas a 16.7%, la probabilidad teórica de observar cualquier número: 1, 2, 3, 4, 5, o 6 (ver Figura 2). Este resultado también es consecuencia de la Ley Débil de los Números Grandes.

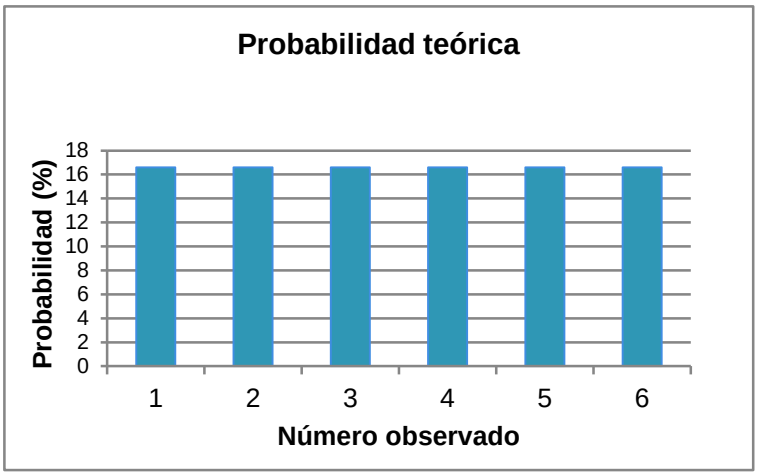


Figura 2. Probabilidad teórica de 1, 2, 3, 4, 5 o 6 en lanzamiento de un dado corriente.

Los ejercicios 8 y 9 son complementarios y podrían dejarse como tarea para la casa.

Adaptaciones e ideas adicionales

El lanzamiento de un dado lo puede sustituir por el lanzamiento de una moneda corriente o cualquier objeto que permita que los resultados se puedan agrupar en dos categorías.

Además, es bueno que discuta la importancia de la simulación para estimar una probabilidad de un evento en una situación de interés. Por ejemplo, una forma sencilla de imaginarse qué tan difícil puede llegar a ser calcular la probabilidad teórica de un evento consiste en el siguiente experimento: tome un cubo lleno de agua y en el centro coloque una copa de vidrio o cualquier otro material pesado, de tal manera que la copa se mantenga en el fondo del cubo y que una moneda pueda ingresar en la copa, tal como se muestra en la figura. Tome una moneda (por ejemplo un chavito) y desde una distancia corta lance la moneda dentro del cubo, **¿cuál es la probabilidad de que el chavito caiga dentro de la copa?**

Pregúnteles a sus estudiantes como calcularían la probabilidad teórica de que la moneda caiga dentro de la copa. Es posible que salgan muchas respuestas, pero debe quedar claro que calcular la probabilidad teórica en este experimento es difícil debido a las variables involucradas en el experimento (efecto del agua, distancia, tamaño de la copa, etc.). En estas situaciones, una forma de estimar la probabilidad de interés es usando simulación mediante un experimento. Aquí puede indagar sobre cómo planificarían un experimento para estimar esta probabilidad. Quizás pueda asignar este experimento como una tarea.

Haga énfasis en que muchas veces los científicos no pueden calcular una probabilidad teórica, como en el caso de un número par en el lanzamiento de un dado, así que deben recurrir a la simulación para estimar probabilidades. A diferencia del lanzamiento de los dados, hoy en día se usan las computadoras para hacer experimentos con un número de repeticiones muy grande. ¿Por qué es importante repetir el experimento muchas veces?

Otros recursos

Visite el siguiente enlace para correr una aplicación en Java la cual demuestra la Ley Débil de los Números Grandes:
http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_10_prob.html

Haga una búsqueda en internet de aplicaciones en Java que ilustran la Ley Débil de los Números Grandes. Use palabras claves, tales como “Weak Law of the Large Numbers” y “Java Applet”.

Créditos y Agradecimientos

Esta actividad fue editada por el Dr. Pedro A. Torres-Saavedra. La versión original corresponde a una actividad que se llevó a cabo con la Dra. Dámaris Santana-Morant en un taller del proyecto AFAMaC-Matemáticas. La profesora Marggie González-Toledo también participó en la revisión de la actividad. Estos profesores son miembros del Departamento de Ciencias Matemáticas de la UPR Mayagüez. Agradecimiento a la estudiante graduada Yareliz Román por su ayuda en la elaboración de este documento. Algunas de las imágenes usadas en este documento corresponden a la licencia de Wikipedia *“noncommercial use”.*