

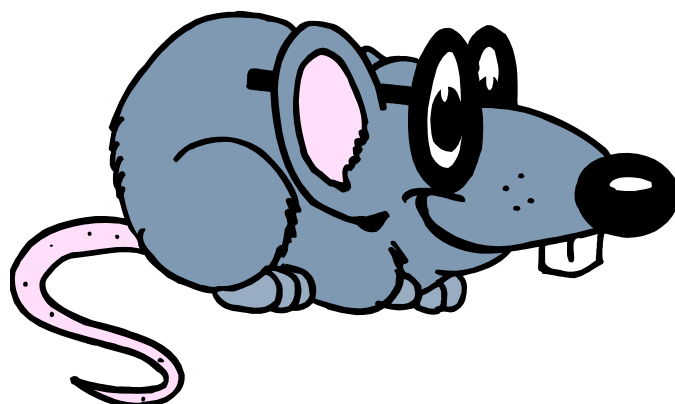
El ratón aleatorio



Análisis de Datos y Probabilidad

Grado 9-12

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)



Introducción

En esta actividad aprenderá a estimar la probabilidad empírica de un evento usando un experimento aleatorio y a comparar este valor con la probabilidad teórica del evento, la cual obtendrá usando reglas básicas de probabilidad.

Objetivos de Aprendizaje

Luego de finalizar la actividad, el estudiante será capaz de:

1. C-examinar la importancia del tamaño de muestra cuando se estima una probabilidad.
2. P-estimar la probabilidad de un evento usando una simulación.
3. P-calcular la probabilidad de un evento usando las reglas de probabilidad.
4. A-explorar el uso de simulación para resolver problemas.

Estándares y Expectativas (*PR Common Core*)

Estándar de Contenido: **Análisis de Datos y Probabilidades**

(+) 9.E.14.1 Define una variable aleatoria para una cantidad de interés, asignándole un valor numérico a cada evento de un espacio muestral; grafica la distribución de probabilidad correspondiente con las mismas imágenes gráficas usadas para la distribución de datos.

(+) 9.E.14.3 Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral donde las probabilidades teóricas se puedan calcular. Halla el valor esperado (ejemplo: Halla la distribución de probabilidad teórica para el número de respuestas correctas que se obtienen al adivinar las cinco preguntas de un examen de selección múltiple, en el que cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta, y halla la calificación esperada según diferentes sistemas de calificación).

(+) 9.E.14.4 Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida para un espacio muestral en el que las probabilidades están asignadas empíricamente; halla el valor esperado (ejemplo: Halla la distribución actual de datos para el número de televisores por hogar en Estados Unidos, y calcula el número esperado de televisores por hogar. ¿Cuántos televisores esperaríamos encontrar en 100 hogares escogidos al azar?).

(+) 9.E.15.4 Usa probabilidades para tomar decisiones justas (ejemplo: Distribuir por grupos, usar un dispositivo que genera números al azar).

(+) 9.E.15.5 Analiza decisiones y estrategias al usar conceptos de probabilidad (ejemplo: Hacer pruebas de productos, pruebas médicas, cambiar el portero de un equipo de hockey al final de un partido).

Materiales

- Un dado corriente.
- Calculadora.
- Plantilla de la actividad.

Tiempo Estimado: 60 minutos.

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)

Este material se distribuye gratuitamente para uso en los salones de clase. Su venta está prohibida. Su desarrollo fue posible gracias al apoyo de la *American Statistical Association (ASA)*, Capítulo de Puerto Rico de la ASA y el proyecto AFAMaC-Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez.

(+) 9.E.16.2 Resume datos de una simulación al usar los resúmenes numéricos y las gráficas apropiadas; desarrolla un estimado para la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística de la vida diaria y discute el efecto de un número de intentos en la probabilidad estimada de un evento.

(+) ES.E.46.2 Reconoce y explica los conceptos de probabilidad condicional e independencia en el lenguaje y situaciones de la vida diaria (ejemplo: Comparar la probabilidad de sufrir de cáncer de pulmón si se es fumador, con la probabilidad de ser fumador si se sufre de cáncer de pulmón).

ES.E.47.1 Halla la probabilidad condicional de A dado B como la fracción de resultados de B que también pertenecen a A, e interpreta la respuesta en términos del modelo.

ES.E.47.2 Aplica la regla de la suma, $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$ e interpreta la respuesta en términos del modelo.

ES.E.47.3 Aplica la regla general de la multiplicación en un modelo de probabilidad uniforme, $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ e interpreta la respuesta en términos del modelo.

Disponible en la página web: <http://pegasus.uprm.edu/~pedro.torres/RepASA>

Actividad

Al ratón Jerry le gusta tomar ciertos riesgos y ha decidido recorrer un laberinto con varias estaciones usando movimientos de acuerdo a los resultados del lanzamiento de un dado. Al final del laberinto hay dos posibilidades: queso o gato. El juego consiste en ubicar el ratón (ficha) en la salida del laberinto y seguir los caminos del laberinto de acuerdo al resultado del lanzamiento del dado. Si el número que resulta al lanzar el dado es par entonces el ratón se mueve hacia la derecha (D) de cada estación (2, 4, 6 → Derecha). Por el contrario, si el número que resulta al lanzar el dado es impar entonces el ratón se mueve hacia la izquierda (I) de cada estación (1, 3, 5 → Izquierda). El dado se sigue lanzando hasta que el ratón alcance el queso o el gato.

Para esta actividad puede formar grupos de dos estudiantes.



Un **experimento es aleatorio** si no se puede determinar de antemano su resultado. Es decir, un experimento es aleatorio si produce resultados diferentes cuando se repite bajo las mismas condiciones. De otro lado, decimos que un **experimento es determinístico** si se conoce de antemano su resultado cuando se repite bajo las mismas circunstancias.

Discusión

1. El ratón Jerry no sabe nada de probabilidad. Sin embargo, el ratón le pide a usted una asesoría sobre sus chances de terminar en el queso para saber si inicia el recorrido por el laberinto. Escriba lo que le diría al ratón. Argumente su respuesta.

En esta parte se puede crear una discusión interesante sobre cuál de los dos resultados, el queso o el ratón, es más probable. Algunos estudiantes quizás argumenten que dado que la probabilidad de un número par e impar es la misma entonces el ratón tiene la misma probabilidad de terminar en cualquiera de los dos resultados. Otra estrategia que podrían usar los estudiantes es contar el número de caminos hacia el gato y el ratón, respectivamente. En este laberinto hay dos caminos que terminan en el gato y tres que terminan en el ratón. Esto podría usarse para decir que la probabilidad de terminar en el gato es $2/5$ mientras que la probabilidad de terminar en el queso es $3/5$. Sin embargo, a pesar de que en la práctica el queso tiene mayor probabilidad, la probabilidad $3/5$ es incorrecta ya que los caminos tienen diferentes longitudes, y por lo tanto, tienen diferentes probabilidades. Por ejemplo, una forma de terminar en el gato es (I, I) y (D,D,D), las dos con longitudes diferentes. Si los estudiantes no mencionan los caminos posponga esta discusión para la pregunta 7.

Ahora puede decirles a los estudiantes que vamos a estimar las probabilidades de terminar en gato o queso usando simulación con un dado y una ficha.

Espacio muestral: En un experimento aleatorio el espacio muestral consiste de todos los posibles resultados del experimento. Por ejemplo, en el lanzamiento de dos dados corrientes los posibles resultados son 36: $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \dots, (5,6), (6,6)\}$.

Probabilidad teórica de un evento A: En un espacio muestral donde todos los resultados son igualmente probables se define como el cociente entre el número de formas que puede ocurrir A sobre el total de resultados posibles en el espacio muestral. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda corriente la probabilidad teórica de cruz es 0.5 o 50%. En el caso del lanzamiento de los dos dados, la probabilidad de obtener dobles es $6/36 = 1/6$.

Probabilidad empírica de un evento A: También se conoce como frecuencia relativa o probabilidad experimental. Es el cociente entre el número de veces que ocurre el evento A sobre el total de repeticiones del experimento. Por ejemplo, si lanzo una moneda corriente 100 veces y obtengo 55 cruces entonces la probabilidad empírica de cruz es igual a $55/100 = 0.55$ o 55%.

La probabilidad es siempre un número entre 0 y 1. Si se expresa como porcentaje entonces es un número entre 0% y 100%.

- Use la plantilla de la actividad, un dado y una ficha para jugar al laberinto. Tome la ficha y ubíquela en la casilla de la entrada. Mueva la ficha a través del laberinto de acuerdo al lanzamiento del dado hasta llegar al queso o al gato (Par=Derecha, Impar=Izquierda). Repita el juego del laberinto 16 veces y marque con una X el resultado de cada juego en la Tabla 1. Note que en algunas corridas del juego es suficiente con lanzar el dado dos veces para alcanzar el queso o el gato. En otras ocasiones quizás tenga que lanzarlo tres veces.

Vamos a jugar una vez. En el primer lanzamiento del dado el resultado fue 5 entonces muevo la ficha hacia la izquierda (casilla 1). En el segundo lanzamiento obtuve el 3 entonces muevo la ficha a la izquierda (gato). Esta primera corrida del juego terminó en gato. Por lo tanto, marco una X para el gato bajo la primera columna de la Tabla 1. Un procedimiento similar se repite 15 veces más. Los resultados de las 16 corridas del juego se muestran en la Tabla 1. En esta parte aproveche para discutir la idea de aleatoriedad. Este experimento de lanzar un dado se considera un experimento aleatorio. Por ejemplo, pregunte si se obtendrían los mismos resultados si lanzamos nuevamente el dado 16 veces.

Tabla 1. Resultados de 16 repeticiones del juego del laberinto

Corrida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
Gato	X		X			X					X			X			5
Queso		X		X	X		X	X	X	X		X	X		X	X	11

- Use los resultados de la Tabla 1 del ejercicio 2) para calcular la probabilidad empírica o experimental de que el ratón termine en el queso y el gato, respectivamente.

De un total de 16 repeticiones del juego, 5 terminaron en el gato y 11 en el queso. Es decir, la probabilidad empírica de terminar en el gato es igual a $5/16 = 0.3125$, mientras que para el queso la probabilidad empírica es igual a $11/16 = 0.6875$. De acuerdo con los resultados del juego la probabilidad de terminar en el queso es casi el doble que la de terminar en el gato.

- Recopile la información de otros cuatro grupos del salón de clase. Escriba la información en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados del juego del laberinto de cinco grupos (incluyendo mis resultados).

Grupo	# de juegos	Gato	Queso
Mis resultados	16	6	10
1	16	5	11
2	16	8	8
3	16	7	9
4	16	2	14
Total	80	28	52



Una forma de lanzar dados virtualmente es visitando la siguiente página web: www.random.org/dice/. Allí podrá simular el lanzamiento de hasta 60 dados simultáneamente.

Home Games Numbers Lists & More Drawings Web Tools Statist

RANDOM.ORG

Do you own an iOS or Android device? Check out our app!

Dice Roller

This form allows you to roll virtual dice. The randomness comes from atmospheric pseudo-random number algorithms typically used in computer programs.

Roll virtual dice.

Confused about terminology? The word 'die' is singular and 'dice' is plural.



Fuente: <http://www.wauwsieraden.nl/>

Alternativamente, puede pedirles a los estudiantes que bajen una aplicación para simular el lanzamiento de dados. Por ejemplo, **Natural 20 Lite** para iPhone o **Dice Roller** en Android. Busque más aplicaciones con las palabras claves "Dice Roller".

5. Estime la probabilidad empírica del queso y el gato, respectivamente, usando los resultados de los cinco estudiantes de la Tabla 2 del ejercicio anterior.

De un total de 80 repeticiones del juego, 28 terminaron en el gato y 52 en el queso. Es decir, la probabilidad empírica de terminar en el gato es igual a $28/80 = 0.35$, mientras que para el queso la probabilidad empírica es igual a $52/80 = 0.65$. De acuerdo con los resultados del juego la probabilidad de terminar en el queso es casi el doble que la de terminar en el gato.

6. Diga si los resultados del ejercicio 5) justifican su respuesta en la pregunta 1).

Las probabilidades calculadas en la parte 5 nos indican que efectivamente el ratón tiene más chance de terminar en el queso.

7. Cuente cuántos caminos hay hacia el gato y el queso, respectivamente. Para contar los caminos cuente todos los posibles recorridos que puede hacer el ratón siguiendo las direcciones del laberinto desde la salida hasta llegar al queso o al gato. Escriba los resultados en la Tabla 3.

Tabla 3. Número de caminos que terminan en el gato y queso.

Resultado	Números de caminos
Gato	2
Queso	3

8. De acuerdo, a los resultados de la Tabla 3 del ejercicio 7), ¿cuál es la probabilidad de terminar en el gato y el queso, respectivamente?

Si nos dejamos llevar por el número de caminos hacia el gato o queso podríamos decir que la probabilidad de terminar en el queso es $3/5$ y en el gato $2/5$. Sin embargo, tal como mencionamos en la pregunta 1 estas probabilidades son incorrectas.

9. Calcule las probabilidades teóricas de que el ratón termine en el gato y el queso, respectivamente, usando las leyes básicas de probabilidad. Complete la Tabla 4.

Comencemos por listar los posibles caminos tanto para el gato como para el queso.

Resultado	Posibles caminos
Gato	Camino 1 = (I, I) Camino 2 = (D,D,D)
Queso	Camino 1 = (I,D) Camino 2 = (D,I) Camino 3 = (D,D,I)



Un **experimento es aleatorio** si no se puede determinar de antemano su resultado. Es decir, un experimento es aleatorio si produce resultados diferentes cuando se repite bajo las mismas condiciones. De otro lado, decimos que un **experimento es determinístico** si se conoce de antemano su resultado cuando se repite bajo las mismas circunstancias.

Espacio muestral: En un experimento aleatorio el espacio muestral consiste de todos los posibles resultados del experimento. Por ejemplo, en el lanzamiento de dos dados corrientes los posibles resultados son 36: $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \dots, (5,6), (6,6)\}$.

Probabilidad teórica de un evento A: En un espacio muestral donde todos los resultados son igualmente probables se define como el cociente entre el número de formas que puede ocurrir A sobre el total de resultados posibles en el espacio muestral. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda corriente la probabilidad teórica de cruz es 0.5 o 50%. En el caso del lanzamiento de los dos dados, la probabilidad de obtener dobles es $6/36 = 1/6$.

Probabilidad empírica de un evento A: También se conoce como frecuencia relativa o probabilidad experimental. Es el cociente entre el número de veces que ocurre el evento A sobre el total de repeticiones del experimento. Por ejemplo, si lanzo una moneda corriente 100 veces y obtengo 55 cruces entonces la probabilidad empírica de cruz es igual a $55/100 = 0.55$ o 55%.

La probabilidad es siempre un número entre 0 y 1. Si se expresa como porcentaje entonces es un número entre 0% y 100%.

Ahora, veamos como calcular la probabilidad del Camino 1 que resulta en gato. Los demás caminos siguen un razonamiento similar.

$$\begin{aligned} P(\text{Camino 1}) &= P(I, I) = P(\text{impar}, \text{impar}) \\ &= P(\text{impar})P(\text{impar}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La probabilidad $P(\text{impar}, \text{impar})$ la podemos escribir como el producto de dos probabilidades ya que los eventos “obtener un número impar en el primer lanzamiento del dado” y “obtener un número impar en el lanzamiento del segundo dado” son independientes. Por lo tanto, usando la regla para eventos independientes tenemos que $P(\text{impar}, \text{impar})$ es igual al producto de las probabilidades individuales. La probabilidad de un número impar en el lanzamiento de un dado es $\frac{1}{2}$. De manera similar, $P(\text{Camino 2})$ es igual a $\frac{1}{8}$. Ahora, la probabilidad de terminar en gato es igual a

$$\begin{aligned} P(\text{Gato}) &= P(\text{Camino 1 o Camino 2}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375. \end{aligned}$$

En esta última parte usamos la regla de adición de dos eventos. Note que los dos caminos no pueden ocurrir al mismo tiempo. Así, que la probabilidad de que ocurra el camino uno o dos es la suma de sus respectivas probabilidades (eventos exclusivos).

Siguiendo procedimientos similares, la probabilidad de terminar en queso es igual a

$$\begin{aligned} P(\text{Queso}) &= P(\text{Camino 1 o Camino 2 o Camino 3}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625. \end{aligned}$$

Tabla 4. Probabilidad teórica de terminar en gato o queso.

Resultado	Probabilidad teórica
Gato	$\frac{3}{8} = 0.375$
Queso	$\frac{5}{8} = 0.625$

Una forma más sencilla de explicar los cálculos de las probabilidades teóricas es usando un diagrama de árbol.

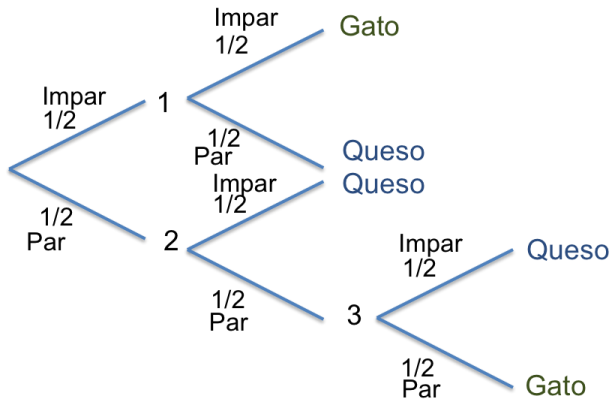


Eventos Independientes: Dos eventos aleatorios A y B se dice que son independientes si la ocurrencia de A no afecta la ocurrencia de B, y viceversa.

Eventos Exclusivos: Dos eventos aleatorios A y B se dice que son exclusivos (o disjuntos) si los dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Regla de multiplicación: Si dos eventos A y B son independientes entonces $P(A \text{ y } B) = P(A)P(B)$. Si los eventos no son independientes entonces $P(A \text{ y } B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, donde $P(A|B)$ es la probabilidad condicional del evento A dado que B ocurrió.

Regla de adición: Si dos eventos A y B son exclusivos entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$. Si los eventos no son exclusivos entonces $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.



10. Compare los valores de la probabilidad teórica obtenidos en el ejercicio 9) con los obtenidos en el ejercicio 8). Si son diferentes, ¿por qué ocurren estas diferencias? ¿cuál es el resultado correcto?

Las probabilidades de gato y queso en el ejercicio 8) son iguales a 0.4 y 0.6, respectivamente. Sin embargo, estas probabilidades fueron calculadas asumiendo que los caminos son igualmente probables (¡incorrecto!). Por ejemplo, en el caso del gato la probabilidad correcta es 0.375. Es decir, la probabilidad calculada en la parte 8) excede la probabilidad teórica del evento. A pesar de que la diferencia no es tan exagerada en este laberinto, se pueden construir laberintos donde las probabilidades sean muy diferentes.

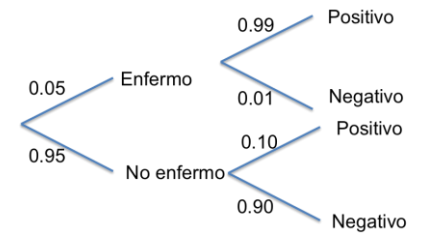
11. Finalmente, compare los valores de la probabilidad empírica del ejercicio 5) con los obtenidos en la Tabla 4 del ejercicio 9).

Las probabilidades empíricas de gato y queso en el ejercicio 5) fueron 0.35 y 0.65, respectivamente. Esos números son muy similares a las probabilidades teóricas 0.375 y 0.625, respectivamente.

12. ¿Cuáles son los chances teóricos de que el ratón termine en el queso comparado con que termine en el gato? Use las probabilidades teóricas para responder esta pregunta.

Si dividimos las probabilidades teóricas de queso sobre gato entonces tenemos que el chance de terminar en el queso es aproximadamente $\frac{0.625}{0.375} = 1.67$ veces el chance de terminar en el gato.

Un **diagrama de árbol** se puede usar para calcular probabilidades de **eventos compuestos**. Por ejemplo, suponga que la probabilidad de que una persona tenga una enfermedad es 0.95. Si la persona está enferma, una prueba de laboratorio detecta la enfermedad con probabilidad 0.99. Si la persona no está enferma entonces la prueba dice que la persona tiene la enfermedad con probabilidad 0.10. El siguiente diagrama de árbol ilustra este problema.



La probabilidad de dar positivo en la prueba será igual a $(0.05)(0.99) + (0.95)(0.10) = 0.1445$. Las probabilidades individuales se obtienen multiplicando las probabilidades de las ramas del árbol. Una prueba da positivo bajo dos escenarios.



Fuente: <http://www.shmoop.com/>

“Es una verdad muy cierta que cuando no esté a nuestro alcance determinar lo que es verdad deberemos seguir lo que es más probable”. (Descartes)

Adaptaciones e ideas adicionales

El lanzamiento de un dado lo puede sustituir por el lanzamiento de una moneda corriente o cualquier objeto que permita que los resultados se puedan agrupar en dos categorías. Además, puede cambiar la historia del queso, el gato y el ratón por otros personajes u objetos tales como un náufrago, un barco y un tiburón; un conejo, una zanahoria y un zorro, entre otros. Es igualmente interesante modificar o construir un laberinto diferente.

Recursos adicionales

En la siguiente dirección de internet puede encontrar juegos con laberintos: <http://www.matemath.com/azar/problemas/problemas.html>. Además, en este enlace puede ver un video explicando los cálculos de la probabilidad teórica: <https://www.youtube.com/watch?v=Pr3k-ZfCPfQ>.