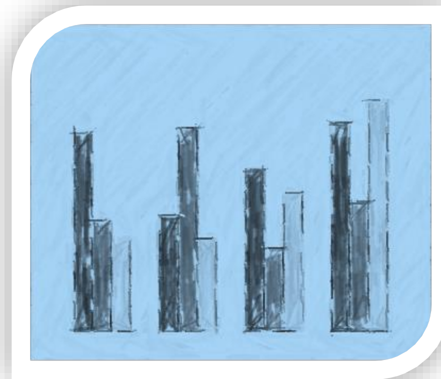
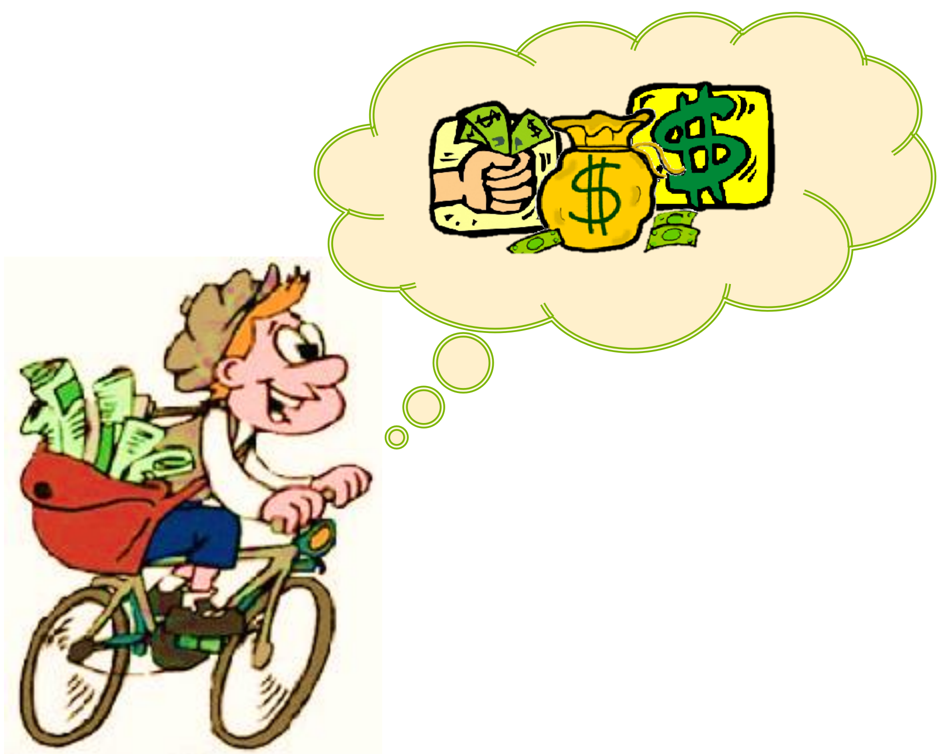
Repartidor de periódicos



Análisis de Datos y Probabilidad

Grado 9-12

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)



Introducción

Imagine que usted es un repartidor de periódicos y gana $5 a la semana por cada cliente. Uno de los clientes le propone lo siguiente: En lugar de darle los $5 por semana, usted tendrá la oportunidad cada semana de sacar dos billetes de una urna que contiene dos billetes de $10 y cinco de $1. ¿Qué forma de pago aceptaría usted? ¿Es esta una buena oferta?

Objetivos de Aprendizaje

Haciendo uso de una simulación, el estudiante:

- Interpretará el valor esperado de una variable aleatoria como la media de la distribución de probabilidad.
- Desarrollará una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida empíricamente y teóricamente.
- Reconocerá que la media de la muestra tiende a acercarse a la media de la población a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Estándares y Expectativas (PR Common Core)

Estándar de Contenido: **Análisis de Datos y Probabilidades**

(+) 9.E.14.1 Define una variable aleatoria para una cantidad de interés, asignándole un valor numérico a cada evento de un espacio muestral; grafica la distribución de probabilidad correspondiente con las mismas imágenes gráficas usadas para la distribución de datos.

(+) 9.E.14.2 Calcula el valor esperado de una variable aleatoria; lo interpreta como la media de la distribución de probabilidad.

(+) 9.E.14.3 Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral donde las probabilidades teóricas se puedan calcular. Halla el valor esperado. (ejemplo: Halla la distribución de probabilidad teórica para el número de respuestas correctas que se obtienen al adivinar las cinco preguntas de un examen de selección múltiple, en el que cada pregunta tiene cuatro opciones de respuesta, y halla la calificación esperada según diferentes sistemas de calificación).

(+) 9.E.14.4 Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida para un espacio muestral en el que las probabilidades están asignadas empíricamente; halla el valor esperado (ejemplo: Halla la distribución actual de datos para el número de televisores por hogar en Estados Unidos, y calcula el número esperado de televisores por hogar. ¿Cuántos televisores esperaríamos encontrar en 100 hogares escogidos al azar?).

(+) 9.E.15.1 Considera los posibles resultados de una decisión al asignar probabilidades a valores de pago y hallar los valores esperados.

Materiales

- Bolsa y papeles.
- Plantilla de la actividad.
- Calculadora.

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)

Este material se distribuye gratuitamente para uso en los salones de clase. Su venta está prohibida. Su desarrollo fue posible gracias al apoyo de la *American Statistical Association (ASA),* Capítulo de Puerto Rico de la ASA y el proyecto AFAMaC-Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez.

Adaptado de *Navigating through probability in grades 6-8 (p. 80-83)*. National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

(+) 9.E.15.2 Halla el pago esperado en un juego de azar (ejemplo: Halla las ganancias esperadas de un billete de la lotería estatal o de un juego en un restaurante de comidas rápidas).

(+) 9.E.15.3 Evalúa y compara estrategias con base en los valores esperados (ejemplo: Compara un deducible alto y uno bajo de una póliza de seguro de automóvil, usa probabilidades razonables de sufrir un accidente pequeño o uno grave).

ES.E.42.2 Reconoce que la media de la muestra tiende a acercarse a la media de la población a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Preguntas

1. ¿Cuáles son los posibles resultados si usted selecciona dos billetes sin reemplazo de la urna semanalmente? Intuitivamente, ¿cuál de los posibles resultados es el más probable?

   Los posibles resultados con esta oferta son tres: ganar $20, $11 o $2 semanalmente. Intuitivamente, el resultado más probable es $2 porque hay más billetes de $1 que de $10.

2. Para simular este problema usaremos una bolsa y siete papeles: cinco con el número 1 y dos con el número 10. Saque un papel y anote el número que obtuvo en la columna Billete 1 de la tabla a continuación. Repita para Billete 2. Calcule el pago total para una semana.

3. Usando el método de simulación de la pregunta 2), simule el pago que usted recibiría durante 20 semanas usando la oferta del cliente.

Simulación: Es el proceso de diseñar un modelo de una situación real usando manipulativos (e.g., dados, monedas) o una computadora.

Semana	Billete 1	Billete 2	Pago Total
1	1	1	2
2	1	10	11
3	1	1	2
4	1	1	2
5	1	1	2
6	1	10	11
7	1	1	2
8	10	1	11
9	1	1	2
10	10	1	11
11	1	1	2
12	10	10	20
13	1	10	11
14	1	1	2
15	1	10	11
16	1	1	2
17	1	10	11
18	1	1	2
19	1	10	11
20	1	1	2

4. Usando la información del problema y de la tabla anterior complete la siguiente información.

	Estrategia: \$5 / semana	**Estrategia: Dos billetes seleccionados aleatoriamente**
Pago total en 20 semanas	\$100	\$130
Pago promedio en 20 semanas	\$5	\$6.50

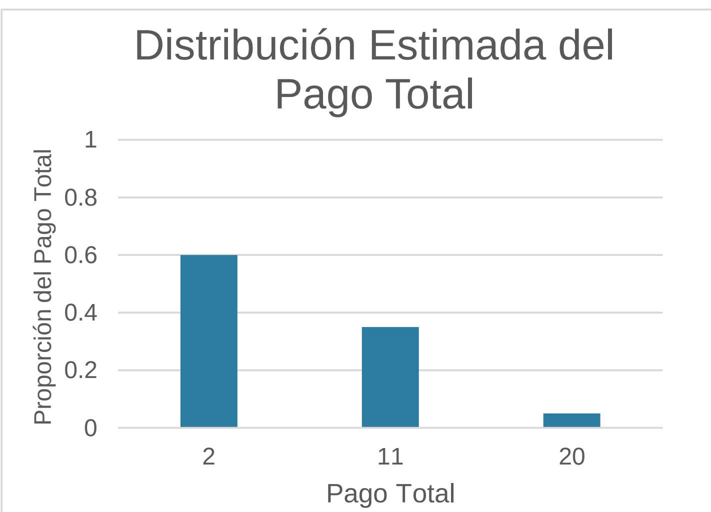
5. Haga un gráfico de la distribución de probabilidad estimada del pago total de la tabla de la parte 3).

Para obtener la distribución de probabilidad estimada del pago total usaremos la frecuencia relativa de cada uno de los posibles resultados. Es decir, vamos a calcular la frecuencia relativa de ganar \$2, \$11 y \$20.

Frecuencia relativa de ganar \$2 = $\frac{11}{20} = 0.55$

Frecuencia relativa de ganar \$11 = $\frac{8}{20} = 0.40$

Frecuencia relativa de ganar \$20 = $\frac{1}{20} = 0.05$



Distribución de probabilidad: Es una tabla o ecuación que le asigna a los posibles resultados de un experimento estadístico una probabilidad de ocurrencia. Una distribución de probabilidad debe satisfacer las siguientes reglas:

1) La probabilidad de cada posible resultado está entre 0 y 1.

2) La suma de las probabilidades de todos los posibles resultados es igual a 1.

Frecuencia relativa: Método empírico para aproximar probabilidades. Si un experimento se repite N veces y el evento A ocurre m de estas veces, entonces

$$P(A) \approx frecuencia\ relativa\ de\ A = \frac{m}{N}.$$

6. Recopile la información de las 20 simulaciones de otros cuatro grupos en el salón de clase. Escriba la información en la siguiente tabla:

Grupo	Simulaciones	Pago total en 20 semanas	Pago promedio en 20 semanas
Mi grupo	20	157	7.85
Grupo 1	20	94	4.70
Grupo 2	20	166	8.3
Grupo 3	20	130	6.5
Grupo 4	20	121	6.05
Total	**100**	**668**	**Promedio = 6.68**

Complete la siguiente tabla con la información anterior:

	Estrategia: $5 / semana	Estrategia: Dos billetes seleccionados aleatoriamente
Pago total en 100 semanas	$500	$668
Pago promedio en 100 semanas	$5	$6.68

7. Finalmente, halle la distribución de probabilidad para este problema y calcule el valor esperado del pago semanal. Compare el valor esperado con los valores promedios encontrados en la parte 4) y 6).

   Para hallar la distribución de probabilidad necesitamos calcular la probabilidad teórica de cada uno de los posibles resultados del experimento. Es decir, vamos a calcular la probabilidad de ganar $2, $11 y $20.

   La probabilidad de ganar $2 es igual a la probabilidad de que los Billetes 1 y 2 sean $1. Usaremos la regla de la multiplicación para obtener esta probabilidad.

$$P(Ganar\ \$2) = P(Billete\ 1 = \$1\ y\ Billete\ 2 = \$1)$$
$$= P(Billete\ 2 = \$1 \mid Billete\ 1 = \$1)\, P(Billete\ 1 = \$1)$$
$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} = 0.476$$

   Ahora, se puede ganar $11 de dos maneras:

   1) Billete 1 = $1 y Billete 2 = $10
   2) Billete 1 = $10 y Billete 2 = $1

Regla de multiplicación: Si dos eventos A y B son independientes entonces $P(A\ y\ B) = P(A)P(B)$. Si los eventos no son independientes entonces $P(A\ y\ B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(B)$, donde $P(A|B)$ es la probabilidad condicional del evento A dado que B ocurrió.

Promedio: Es una medida de tendencia central para un conjunto de datos que se calcula sumando todos los números y dividiendo entre la cantidad de datos.

El **valor esperado** es el valor que se espera obtener de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite muchas veces.

Para variables discretas, es decir, cuando la variable toma un número finito de posibles resultados, el valor esperado se calcula multiplicando cada resultado por su probabilidad y luego sumando estas cantidades. Por, ejemplo, al lanzar un dado se tienen seis posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. El valor esperado se calcula

$$1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + \cdots + 6 \cdot P(X=6)$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= 3.5$$

Entonces, la probabilidad de ganar \$11 es igual a la probabilidad de que el Billete 1 sea \$1 y el Billete 2 sea \$10, más la probabilidad de que el Billete 1 sea \$10 y el 2 sea \$1. Usando la regla de la multiplicación nuevamente se tiene que

$$
\begin{aligned}
&P(Ganar\ \$11) \\
&= P(Billete\ 1\ =\ \$1\ y\ Billete\ 2\ =\ \$10) + \\
&\quad P(Billete\ 1\ =\ \$10\ y\ Billete\ 2\ =\ \$1) \\
&= P(Billete\ 2\ =\ \$10|\ Billete\ 1 = \$1)\ P(Billete\ 1 = \$1) + \\
&\quad P(Billete\ 2\ =\ \$1|\ Billete\ 1 = \$10)\ P(Billete\ 1\ = \$10) \\
&= \frac{2}{6}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7} = 0.476
\end{aligned}
$$

Por último, la probabilidad de ganar \$20 es igual a la probabilidad de que los Billetes 1 y 2 sean \$10.

$$
\begin{aligned}
&P(Ganar\ \$20) \\
&= P(Billete\ 1\ =\ \$10\ y\ Billete\ 2\ =\ \$10) \\
&= P(Billete\ 2\ =\ \$10|\ Billete\ 1 = \$10)\ P(Billete\ 1 = \$10) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7} = 0.048
\end{aligned}
$$

Pago por semana	Probabilidad
2	0.476
11	0.476
20	0.048
Suma	1

Para obtener el valor esperado se multiplica cada uno de los resultados posibles por su probabilidad y luego se suman estas cantidades.

$$
\begin{aligned}
&2\cdot P(Ganar\ \$2) + 11\cdot P(Ganar\ \$11) + 20\cdot P(Ganar\ \$20) \\
&= 2\cdot 0.476 + 11\cdot 0.476 + 20\cdot 0.048 = 7.15
\end{aligned}
$$

Valor Esperado por Semana = _____\$7.15_____

Al comparar los valores esperados de las preguntas 4) (\$6.50) y 6) (\$7.22) con el valor esperado anterior (\$7.15), se puede notar que la media de la muestra con tamaño 100 está más cerca de la media de la población que la que se obtuvo con la muestra de tamaño20. Esto no necesariamente le va a suceder a todos los estudiantes, Pero si se comparan los resultados de varios estudiantes, en promedio, los valores esperados de las muestras de tamaño 100 se aceran más a la media de la población que el valor esperado de las muestras de tamaño 20.

8. ¿Es la oferta del cliente una buena oferta? Explique su respuesta.

   Si va a trabajar repartiendo periódicos por varias semanas, la oferta del cliente es buena porque, a largo plazo, se espera recibir más de los $5 que recibe por semana actualmente. Sin embargo, a corto plazo no es claro cuál método de pago es mejor.

Adaptaciones

Esta actividad se puede modificar cambiando el contenido de la urna. Por ejemplo, tres billetes de $1 y uno de $10, tres billetes de $1 y dos de $5, etc.