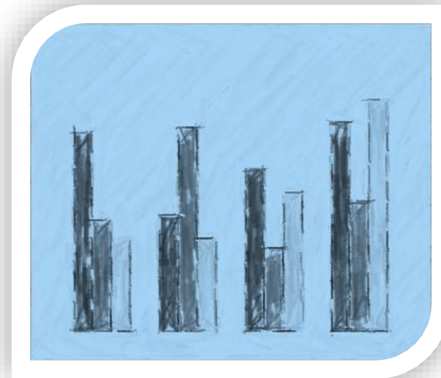
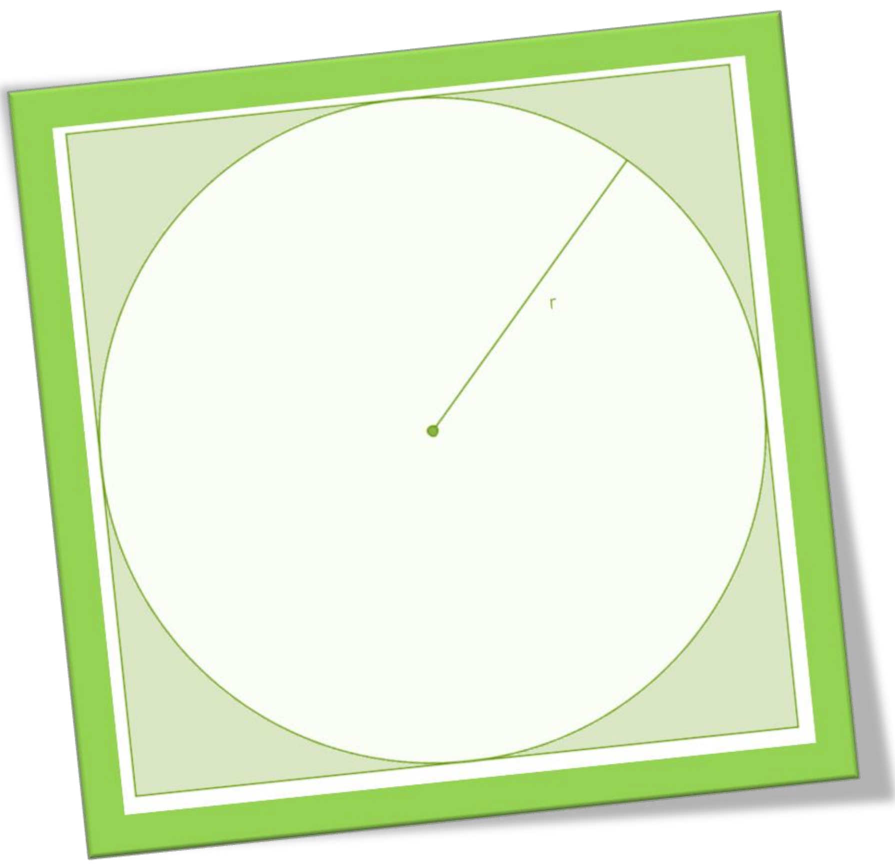
Estimando el área de un círculo usando simulación



Análisis de Datos y Probabilidad

Grado 9

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)



Introducción

Suponga que tengo un círculo de radio 1 y centro en (0,0) inscrito en un cuadrado cuyos vértices se ubican en los puntos (-1, -1), (-1, 1), (1, -1) y (1, 1). Con el propósito de ilustrar el uso de simulación para resolver problemas más complejos, asuma que no conocemos el área del círculo. ¿Cómo podemos estimar el área del círculo usando simulación?

Objetivos de Aprendizaje

Mediante la actividad, el estudiante:

- Discutirá el efecto del número de intentos en la probabilidad estimada de un evento.
- Conducirá una simulación para solucionar un problema.
- Reconocerá que los resultados de una simulación difieren de una simulación a otra.

Estándares y Expectativas (PR Common Core)

Estándar de Contenido: **Análisis de Datos y Probabilidades**

9.E.16.1 Describe una simulación al identificar los componentes y supuestos en un problema; selecciona un instrumento para generar los resultados, define intento y especifica el número de intentos; y conduce una simulación.

(+) 9.E.16.2 Resume datos de una simulación al usar los resúmenes numéricos y las gráficas apropiadas; desarrolla un estimado para la probabilidad de un evento asociado a una situación probabilística de la vida diaria y discute el efecto de un número de intentos en la probabilidad estimada de un evento.

(+) 9.E.16.2 Reconoce que los resultados de una simulación difieren de una simulación a otra; observa que los resultados de una simulación tienden a converger a medida que aumenta el número de intentos.

Materiales

- Una computadora con acceso a Excel.
- Plantilla de la actividad.
- Calculadora.

Repositorio Virtual para la Enseñanza de Estadística y Probabilidad en Escuela Superior (RepASA)

Este material se distribuye gratuitamente para uso en los salones de clase. Su venta está prohibida. Su desarrollo fue posible gracias al apoyo de la *American Statistical Association (ASA),* Capítulo de Puerto Rico de la ASA y el proyecto AFAMaC-Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico – Mayagüez.

Preguntas

1. Si genero un punto aleatorio (a, b) dentro del cuadrado, ¿cómo determino si el punto cae dentro del círculo?

   Para determinar si el punto (a, b) cae dentro del círculo se puede usar la ecuación del círculo: $(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2+(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2=r^2$, donde r es el radio y (h, k) es el centro del círculo. El punto (a, b) estará dentro del círculo si su distancia del centro es menor que el radio. Es decir, usando la ecuación del círculo, hay que verificar si $\sqrt{(\mathrm{a}-\mathrm{h})^2+(\mathrm{b}-\mathrm{k})^2}<\mathrm{r}$. Por ejemplo, para nuestro círculo de radio 1 con centro en (0, 0), el punto (0.3, 0.5) está a una distancia $\sqrt{(0.3-0)^2+(0.5-0)^2}=0.583<1$. Por lo tanto, el punto (0.3, 0.5) está dentro del círculo.

2. Si genero 1,000 puntos aleatorios distribuidos uniformemente dentro del cuadrado, ¿cómo estimo la probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo?

   Sea *n* el número de veces que un punto cayó dentro del círculo y *N* el número de puntos aleatorios generados dentro del cuadrado. Entonces, la probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo se estima con $\frac{n}{N}$.

3. Si sabemos el área del cuadrado y la probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo, ¿cómo estimo el área del círculo?

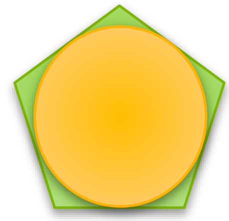
   El área del círculo se estima con $\frac{n}{N} * Área\ del\ cuadrado$.

   Por ejemplo, en nuestro caso el cuadrado tiene lados de tamaño 2. Suponga que 789 puntos de 1,000 puntos aleatorios generados cayeron dentro del círculo.

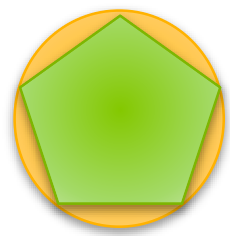
   Área del Cuadrado = $2^2=4$

   Área Estimada del Círculo = $\frac{789}{1000} * 4 = 3.156$

Círculo inscrito: Círculo dibujado dentro de un polígono, siendo cada lado del polígono tangente al círculo.



Círculo circunscrito: Círculo que pasa por los vértices de un polígono dado. Se dice que la figura dentro del círculo está inscrita.

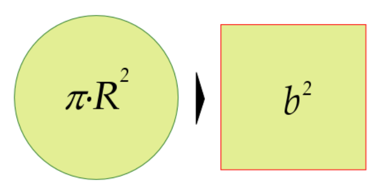


Área de un círculo: El área de un círculo es igual al valor de su radio (R) elevado al cuadrado multiplicado por π.

$A=\pi R^2$

Área de un cuadrado: El área de un cuadrado es igual al valor de uno de sus lados (b) elevado al cuadrado.

$A=b^2$



Fuente:https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fd/Cuadratura-circulo-02.png

Ecuación del círculo: La ecuación de un círculo está dada por:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Donde h y k son las coordenadas del centro del círculo y r es el radio.

Actividad

1. Primero, vamos a generar un número aleatorio de una distribución uniforme sobre el intervalo (-1, 1) usando Excel. Estos números representan las coordenadas (x, y) del punto aleatorio. Para generar un punto aleatorio x entre (-1, 1), ingrese el límite inferior y superior en las columnas B y C, como se muestra en la Figura 1. En la columna D calcule la cantidad b-a. Ahora, en la celda E3 ingrese la fórmula =$B$2+RAND()*$D$2 y oprima Enter. Esta fórmula le generará un número aleatorio para la coordenada x en el intervalo deseado. La función RAND() genera un número aleatorio entre 0 y 1.

	A	B	C	D	E
1		a	b	b-a	x
2		-1	1	2	
3	Numero aleatorio				=$B$2+RAND()*$D$2

Figura 1. Fórmula para generar un número aleatorio entre dos números a y b.

Copie la fórmula anterior hacia abajo tantas celdas como números quiera generar. En la Figura 2 se muestran cinco números aleatorios para x.

	A	B	C	D	E
1		a	b	b-a	x
2		-1	1	2	
3	Numero aleatorio				0.53346
4					-0.31598
5					0.808377
6					0.858413
7					0.878546

Figura 2. Números aleatorios para x.

Repita el mismo procedimiento para y.

2. Para determinar si el punto cae dentro del círculo, usaremos la fórmula de la ecuación del círculo **(x^2 + y^2) < 1.** Ingrese en la celda G3 la fórmula **=IF(E3^2+F3^2<1,1,0)** y oprima Enter. Esta fórmula mostrará 1 si el punto está dentro del círculo y 0 si el punto está afuera. Copie la fórmula anterior hacia abajo tantas celdas como números había generado.

Generación de un número aleatorio entre a y b

Supongamos que el programa genera un número aleatorio entre 0 y 1, pero usted necesita un número aleatorio entre a y b. Sea x el número aleatorio entre 0 y 1 (se asume que la distribución de los números en ese intervalo es uniforme). Entonces si calculamos $y = a + x(b - a)$ obtendremos un número aleatorio entre a y b. Note que si $x = 0$ el número aleatorio obtenido es a, pero si $x = 1$ el número aleatorio obtenido es b. Esta transformación nos permite generar números aleatorios en cualquier intervalo siempre y cuando podamos generar un número aleatorio entre 0 y 1.

0.03278351
0.23215369
0.35481405
0.54084408
0.00478186

Números aleatorios entre 0 y 1 generados por la función RAND() de Excel. Si usted genera números aleatorios en Excel, estos cambian cada vez que hace un cálculo en cualquier celda de la hoja de cálculo.

	A	B	C	D	E	F	G
1		a	b	b-a	x	y	¿Dentro del circulo?
2		-1	1	2			Si=1, No=0
3	Numero aleatorio				0.53346	0.830949	=IF(E3^2+F3^2<1,1,0)
4					-0.31598	0.141069	
5					0.808377	0.191849	
6					0.858413	-0.83072	
7					0.878546	0.863393	

Figura 3. Fórmula para saber si un punto aleatorio cae dentro de un círculo de radio 1 y centro (0, 0).

3. Copie las fórmulas de los pasos 1 y 2 para 30 puntos. Luego, calcule el número total de puntos que cayeron dentro del círculo con la fórmula =SUM(G3:G32) como se muestra en la figura 4.

	A	B	C	D	E	F	G
26				24	-0.453	0.183	1
27				25	-0.746	-0.768	0
28				26	-0.913	0.616	0
29				27	0.319	-0.766	1
30				28	-0.518	-0.1	1
31				19	-0.003	0.52	1
32				30	0.38	-0.879	1
33						Puntos dentro del círculo	=SUM(G3:G32)

Figura 4. Fórmula para obtener el número total de puntos que cayeron dentro del círculo.

4. Use la información de los 30 puntos generados para estimar la probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo.

   De los 30 puntos aleatorios generados en la Tabla 1, 23 cayeron dentro del círculo. Entonces, la probabilidad estimada de que un punto caiga dentro del círculo es $\frac{23}{30} = 0.767$.

   Probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo = 0.767

5. Estime el área del círculo usando los resultados de la simulación.

   El área del cuadrado es $2^2 = 4$ y la probabilidad estimada de que un punto caiga dentro del círculo es 0.767, del ejercicio 4). Entonces, el área estimada del círculo es $4 * 0.767 = 3.068$.

   Área Estimada del Círculo = 3.068

Probabilidad empírica de un evento A: También se conoce como frecuencia relativa o probabilidad experimental. Es el cociente entre el número de veces que ocurre el evento A sobre el total de repeticiones del experimento. Por ejemplo, si lanzo una moneda corriente 100 veces y obtengo 55 cruces entonces la probabilidad empírica de cruz es igual a 55/100 = 0.55 o 55%.

La probabilidad es siempre un número entre 0 y 1. Si se expresa como porciento entonces es un número entre 0% y 100%.

Tabla 1. Puntos aleatorios generados con su respectiva ubicación en el círculo unitario.

Repetición	x	y	¿Dentro del círculo? (Sí=1/No=0)
1	0.354	-0.651	1
2	-0.675	0.886	0
3	0.867	-0.392	1
4	0.865	0.293	1
5	0.146	-0.643	1
6	-0.731	0.732	0
7	-0.875	-0.957	0
8	-0.21	0.158	1
9	-0.819	0.964	0
10	0.127	0.163	1
11	0.285	0.931	1
12	0.873	-0.853	0
13	-0.797	-0.357	1
14	-0.749	-0.566	1
15	-0.214	0.323	1
16	0.179	0.631	1
17	-0.663	-0.527	1
18	-0.207	0.005	1
19	-0.347	0.024	1
20	-0.286	0.908	1
21	0.792	0.503	1
22	-0.455	0.097	1
23	0.136	0.311	1
24	-0.453	0.183	1
25	-0.746	-0.768	0
26	-0.913	0.616	0
27	0.319	-0.766	1
28	-0.518	-0.1	1
19	-0.003	0.52	1
30	0.38	-0.879	1
		Puntos dentro del círculo	**23**

6. Repita el ejercicio 3) para 100 puntos aleatorios.

7. Use la información de los 100 puntos generados para estimar la probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo.

   De los 100 puntos aleatorios generados en la Tabla 2, 80 cayeron dentro del círculo. Entonces, la probabilidad estimada de que un punto caiga dentro del círculo es $\frac{80}{100} = 0.80$.

   Probabilidad de que un punto caiga dentro del círculo = 0.80

8. Estime el área del círculo usando los resultados de la simulación.

   El área del cuadrado es $2^2 = 4$ y la probabilidad estimada de que un punto caiga dentro del círculo es 0.80, del ejercicio 7). Entonces, el área estimada del círculo es $4 * 0.80 = 3.2$.

   Área Estimada del Círculo = 3.2

   Compartan y discutan los resultados de los estudiantes en la clase con el propósito de notar que los resultados difieren de una simulación a otra y que, en general, los resultados de las simulaciones con 100 puntos se acercan más al valor teórico: $\pi * 1^2 = 3.1416$. Es decir, no necesariamente el resultado de una simulación con 100 puntos se va a acercar más a 3.1416 que el de una simulación con 30 puntos para un estudiante en particular. Pero si se comparan los resultados de varios estudiantes, en promedio, los resultados de las simulaciones con 100 puntos se acercan más al valor teórico.

Tabla 2. Puntos aleatorios generados con su respectiva ubicación en el círculo unitario.

Repetición	x	y	¿Dentro del círculo? (Sí=1/No=0)
1	-0.571	0.282	1
2	0.197	-0.525	1
3	0.346	0.317	1
4	-0.605	-0.829	0
5	-0.556	-0.736	1
6	0.187	-0.306	1
7	-0.743	-0.705	0
8	0.466	0.501	1
9	-0.2	0.567	1
10	0.037	0.067	1
11	0.53	0.063	1
12	0.196	-0.623	1
13	-0.889	0.133	1
14	-0.401	-0.334	1
15	0.549	-0.515	1
16	0.11	-0.659	1

17	0.103	0.234	1
18	-0.269	-0.953	1
19	0.612	-0.233	1
20	-0.025	-0.408	1
21	-0.031	-0.614	1
22	0.493	-0.525	1
23	-0.277	-0.459	1
24	-0.579	0.235	1
25	-0.199	-0.619	1
26	0.714	-0.903	0
27	-0.461	-0.626	1
28	-0.342	-0.002	1
19	0.492	-0.668	1
30	0.215	0.956	1
31	-0.903	0.329	1
32	-0.32	-0.621	1
33	-0.416	0.094	1
34	-0.265	0.216	1
35	0.525	0.895	0
36	0.926	-0.352	1
37	-0.323	-0.788	1
38	-0.781	-0.116	1
39	0.208	0.619	1
40	-0.875	0.673	0
41	-0.115	-0.177	1
42	-0.963	-0.435	0
43	0.011	-0.544	1
44	-0.172	0.48	1
45	0.223	-0.849	1
46	0.076	-0.712	1
47	-0.174	0.439	1
48	0.273	0.678	1
49	0.528	-0.965	0
50	-0.492	0.469	1
51	0.372	-0.598	1
52	-0.661	0.239	1
53	0.064	0.517	1
54	0.869	0.544	0
55	0.264	0.261	1
56	0.675	0.329	1
57	-0.299	0.492	1
58	0.529	-0.053	1
59	0.111	0.147	1

60	-0.575	-0.093	1
61	-0.431	0.822	1
62	0.178	0.095	1
63	-0.774	-0.253	1
64	-0.854	-0.218	1
65	-0.776	0.915	0
66	0.688	0.031	1
67	-0.937	-0.721	0
68	-0.568	0.414	1
69	-0.12	0.629	1
70	-0.363	-0.546	1
71	0.247	-0.652	1
72	0.691	-0.791	0
73	0.985	-0.129	1
74	-0.465	-0.327	1
75	0.048	-0.355	1
76	-0.923	0.931	0
77	-0.517	-0.805	1
78	-0.7	0.729	0
79	0.839	-0.177	1
80	-0.535	-0.79	1
81	0.473	0.415	1
82	0.75	0.667	0
83	0.877	0.964	0
84	0.516	0.86	0
85	-0.598	-0.539	1
86	-0.146	0.537	1
87	0.367	0.391	1
88	-0.209	-0.159	1
89	0.315	0.497	1
90	-0.782	-0.01	1
91	-0.334	0.112	1
92	-0.981	-0.194	1
93	-0.273	-0.128	1
94	0.577	-0.908	0
95	0.116	0.999	0
96	0.995	0.225	0
97	0.114	0.891	1
98	0.774	0.256	1
99	-0.683	-0.781	0
100	0.293	-0.107	1
		Puntos dentro del círculo	**80**

Adaptaciones

El uso de simulación es importante para resolver problemas complejos en los cuales no se puede proceder de forma directa. Por ejemplo, el círculo se podría reemplazar por un mapa o la figura de un animal dibujada dentro de un rectángulo. Siguiendo procedimientos similares, podemos estimar el área de interés usando simulación.

Supongamos que es de interés saber qué área del mapa de Sur América de la siguiente figura le pertenece a Brasil. Usando simulación se procedería a generar pares de números aleatorios entre 0 y 15, para el eje de x, y entre 0 y 20 para el eje de y. Por ejemplo, se pueden generar 100 puntos aleatorios (descartando los que no caigan dentro del mapa). Luego, se identifican los puntos que cayeron en Brasil. Usando los resultados de la simulación, se puede estimar el área del continente que le pertenece a Brasil.