Análisis Multiescala de Imágenes y Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Luis Alvarez
Departamento de Informática y Sistemas
Universidad de Las Palmas
Campus de Tafira
35017 Las Palmas, España
Email: lalvarez@dis.ulpgc.es

October 16, 2001

1 Introducción

En este seminario voy a presentar una visión global de resultados obtenidos por el autor de este trabajo en colaboración con los siguientes investigadores: J.Esclarín, F.Guichard, P.L.Lions, L.Mazorra y J.M.Morel que pertenecen al laboratorio CEREMADE de la Universidad París IX y al Departamento de Informática de la Universidad de Las Palmas. Este trabajo es fruto de diversos proyectos de investigación conjuntos entre ambas universidades y ha dado lugar a diferentes publicaciones como son: [ALM92], [AGLM92c], [AGLM92b], [AGLM92a], [AGLM93], [AM94a], [AM94b], [AM94c], [AE97].

Vamos a estudiar algunas aplicaciones de las ecuaciones en derivadas parciales al tratamiento de imágenes. Para nosotros, una imagen es una función $f : \Re^n \to \Re$ donde en general $n = 2$, aunque en algunos casos estudiaremos también $n = 1$ ó $n = 3$, hoy en día, los ordenadores son capaces de trabajar con imágenes de una gran definición (tamaño) y calidad, por ello, en general las imágenes con las que trabajamos son de una gran complejidad, y para poder extraer de ellas algún tipo de información, (objetos presentes en la imagen, etc..), dichas imágenes deben ser simplificadas. La simplificación consiste en general en intentar eliminar elementos de menor importancia para poder discriminar mejor las propiedades importantes de la imagen. Dicho coloquialmente: "*queremos eliminar los arboles para poder observar el bosque*". Por supuesto, la primera cuestión que aparece es que en ocasiones "los árboles" pueden ser más importante que el "bosque". Ello introduce de forma natural una noción de escala. Nosotros podemos mirar la imagen a diferentes escalas. En una escala fina los detalles que aparecen como importantes son los árboles, y a una escala más grosera, los detalles que resaltan están referidos a la configuración total del bosque. Esta reflexión nos plantea un problema importante y en general irresoluble: *¿Cual es la mejor escala para mirar una imagen?,* obviamente no existe en general una escala mejor que otra, todo depende del tipo de detalle que queramos observar.

El tema central de estudio de este seminario es el siguiente: Nosotros partimos de una imagen inicial que está a una determinada escala de resolución y nos planteamos estudiar métodos que nos permitan pasar de esta imagen a otra que esté a una resolución más grosera. La teoría que desarrolla estos métodos se denomina "*Análisis Multiescala de Imágenes ó Scale-Space*" y ha recibido una gran atención en los últimos años tanto por matemáticos, como por ingenieros dedicados al tratamiento de Imágenes.

Matemáticamente, el Análisis Multiescala se puede formalizar de la siguiente forma: Dada una imagen $f : \Re^n \rightarrow \Re$, un análisis multiescala viene determinado por una familia de transformaciones $\{T_t\}_{t\geq 0}$ donde el parámetro t representa la escala, de tal forma que para cada imagen f , $T_t(f)$ es una nueva imagen que representa la imagen f a una escala más grosera dada por t .

Históricamente, los primeros ejemplos de Análisis Multiescala han sido diseñados a partir de convoluciones. es decir:

$$T_t(f)(x) = \int_{\Re^n} K(t, y-x) f(y) dy \tag{1}$$

donde $K(t,x)$ representa un núcleo de convolución. A continuación, a título ilustrativo, pondré 3 ejemplos de Análisis Multiescala que han sido frecuentemente empleados. Por simplicidad los escribiré en dimensión 1,

$$\begin{aligned} K_m(t,x) &= \begin{cases} \frac{1}{2t} & if \quad | x | < t \\ 0 & if \quad | x | \geq t \end{cases} \\ K_c(t,x) &= \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2} \\ K_g(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

El primer núcleo $K_m(t,x)$ determina como Análisis Multiescala una media del valor de la imagen en un entorno de radio t , el segundo núcleo $K_c(t,x)$ es conocido como densidad de Cauchy, y el tercer núcleo $K_g(t,x)$ determina una función gaussiana. Los tres, corresponden a distintos modelos de Análisis Multiescala. Como veremos, existen muchas otras formas de definir Análisis Multiescala, incluyendo por supuesto modelos no-lineales. La principal pregunta que vamos intentar responder en este seminario es: *¿Cual es el mejor Análisis Multiescala?*. Por supuesto, esta pregunta puede tener múltiples respuestas en función de lo que uno necesite para cada problema concreto. Sin embargo, nosotros aquí, intentaremos dar una respuesta a la pregunta a través de una formalización del problema. En primer lugar estableceremos un conjunto de axiomas o principios que los Análisis Multiescala deben verificar, dichos principios. Como veremos, son "naturales" y sencillos; además han sido utilizados por diferentes autores en diversos contextos y teorías. En segundo lugar intentaremos deducir partiendo de estos principios, cual es la forma que tienen los Análisis Multiescala que verifican estos principios. Además, como veremos a lo largo del seminario, podemos llegar, sorprendentemente, a un nuevo modelo de Análisis Multiescala que verifica todos los principios. Ello no quiere decir que sea el mejor Análisis Multiescala posible. Simplemente indica que dentro del marco de estos principios es el mejor posible.

La mayoría de los principios que presentaremos se formulan en términos de invariantes del Análisis Multiescala, por ejemplo la invarianza por traslaciones y rotaciones, lo que nos indica que el análisis es independiente de la localización de los objetos en la imagen, como veremos en la segunda sección, existe una fuerte relación entre invariantes y soluciones de ecuaciones diferenciales. En la tercera sección abordaremos el planteamiento de los principios que utilizaremos. En la sección 4 presentaremos los resultados en el caso general de Análisis Multiescala no-lineales. En la sección 5, presentaremos algunos modelos utilizados en la literatura para la restauración de imágenes. Por último, en la sección 6, abordaremos con cierto detalle, los aspectos numéricos, relacionados con la implementación en ordenador de estos Análisis Multiescala.

2 Ecuaciones diferenciales e invariantes.

Como dice Peter Olver [Olv93], puede resultar sorprendente que la elegante teoría de Grupos de Lie tenga como inspiración la resolución de ecuaciones diferenciales. Efectivamente, a mitad del siglo XIX, Sophus Lie descubrió que algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, correspondían a casos especiales de un método general basado en la invarianza de la ecuación diferencial bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones. Las técnicas desarrolladas en esta teoría, permiten, para una amplia gama de Ecuaciones diferenciales, determinar cual es el conjunto de invariantes que satisface dicha ecuación diferencial. Por supuesto, no es propósito de este seminario desarrollar la Teoría de Grupos de Lie; sin embargo, vamos a presentar en esta sección los resultados obtenidos al aplicar esta teoría a la conocida ecuación del calor en dimensión 1 :

$$u_t = u_{xx} \tag{2}$$

Aplicando las técnicas de la teoría de Grupos de Lie, véase [Olv93], Pg. 119, se obtiene que la ecuación diferencial 2 es invariante por los siguientes grupos de transformaciones:

- $G_1^\lambda(t,x,u) = (t, x+\lambda, u)$
- $G_2^\lambda(t,x,u) = (t+\lambda, x, u)$
- $G_3^\lambda(t,x,u) = (t, x, \lambda u)$
- $G_4^\lambda(t,x,u) = (\lambda^2 t, \lambda x, u)$
- $G_5^\lambda(t,x,u) = (t, x+2\lambda t, ue^{-\lambda x-\lambda^2 t})$
- $G_6^\lambda(t,x,u) = (\frac{t}{1+4\lambda t}, \frac{x}{1+4\lambda t}, \frac{u}{\sqrt{1+4\lambda t}}e^{\frac{-\lambda x^2}{1+4\lambda t}})$
- $G_7^\lambda(t,x,u) = (t, x, u+\lambda v)$ donde v representa cualquier solución de la ecuación.

Es un interesante ejercicio mental comprobar que efectivamente cualquiera de estas transformaciones representa un grupo respecto a λ, es decir, si λ y γ son dos números reales, entonces la composición de las dos transformaciones asociadas a λ y γ también es una transformación del mismo tipo asociada a $\lambda+\gamma$ ò $\lambda\gamma$ dependiendo de la transformación. Por ejemplo es fácil comprobar que $G_5^\lambda \circ G_5^\gamma = G_5^{\lambda+\gamma}$

Que la ecuación 2 es invariante por estos grupos de transformaciones significa que si $u(t,x)$ es una solución de la ecuación, entonces, la composición de u con cualquiera de las transformaciones sigue siendo una solución. Por ejemplo, en el caso de la transformación $G_5^\lambda(t,x,u)$, ello significa que si $u(t,x)$ es solución, entonces $u_\lambda(t,x) = e^{-\lambda x-\lambda^2 t}u(t,x+2\lambda t)$ también es una solución para cualquier valor de λ.

Veamos como la información obtenida a través de los grupos de transformaciones es suficiente para obtener la solución general de la ecuación que viene determinada por la solución fundamental $u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Efectivamente, primero observamos que cualquier constante c es una solución de la ecuación, si aplicamos la transformación $G_6^\lambda(t,x,u)$ con $\lambda=1$, obtenemos $u(t,x) = \frac{c}{\sqrt{1+4t}}e^{\frac{-x^2}{1+4\lambda t}}$. Por último si aplicamos a esta solución la transformación $G_2^\lambda(t,x,u)$ con $\lambda = -\frac{1}{4}$ y a continuación $G_3^\lambda(t,x,u)$ con $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ obtenemos las solución fundamental.

Analicemos brevemente el significado de la invarianza generada por estas transformaciones. Las transformaciones G_1^λ y G_2^λ indican que la solución de la ecuación es invariante por traslaciones. Las transformaciones G_3^λ y G_7^λ indican que la ecuación es lineal. La invarianza por la transformación G_4^λ, indica que la variable temporal t y la variable espacial x están íntimamente ligadas en el sentido de que si yo hago un zoom de la imagen inicial, (un zoom corresponde a la transformación $x \to \lambda x$), entonces recupero la solución de la ecuación cambiando el tiempo a través de la transformación $t \to \lambda^2 t$. Un caso especial se produce cuando la transformación es la misma respecto a las variables espaciales y temporales. Cuando ello se produzca, diremos que la ecuación está normalizada respecto a la escala, es decir:

Definición 1 *Diremos que una ecuación diferencial está normalizada respecto a la escala cuando sea invariante por el grupo de transformaciones* $G^\lambda(t,x,u) = (\lambda t, \lambda x, u)$.

Por ejemplo, la ecuación del calor (2) no está normalizada respecto a la escala, sin embargo la ecuación equivalente $v_t = t v_{xx}$ si lo está. Nótese que está ecuación es equivalente a (2) a través del cambio de variable $(t,x) \to (\frac{t^2}{2}, x)$

En esta sección hemos visto como la búsqueda de grupos de transformaciones invariantes es una herramienta importante que nos permite describir el comportamiento de ecuaciones diferenciales. Por otro lado, podemos constatar como hay una fuerte unión entre el estudio de invariantes, y el estudio de ecuaciones diferenciales. En las secciones siguientes el planteamiento será opuesto al aquí presentado en el sentido de que en lugar de dada una ecuación, intentemos buscar los invariantes, procederemos al revés: Dado un conjunto de invariantes que yo quiero que se verifiquen, buscar las ecuaciones que los satisfacen.

3 Principios del Análisis Multiescala.

En esta sección vamos a establecer y justificar los principios básicos del Análisis Multiescala. En primer lugar empezaremos por la *Causalidad*, o Principio de Estructura Piramidal que establece que el análisis es progresivo y piramidal respecto a la escala. Es decir dada una imagen $T_t(f)$ analizada a la escala t, podemos obtener a partir de ella la imagen $T_{t+h}(f)$ analizada a cualquier escala $t+h$, posterior a t. Formalmente, esto se puede escribir de la siguiente manera:

Definición 2 Causalidad *Dados,* $t, h \geq 0$, *existe un operador de transición* $T_{t,t+h}$, *tal que para cualquier imagen* f, *se tiene :*

$$T_{t+h}(f) = T_{t,t+h} \circ T_t(f) \qquad y \quad T_0(f) = f \tag{3}$$

Ello quiere decir en primer lugar que el análisis avanza desde la escala más fina $t = 0$, que corresponde a la imagen inicial, hacia escalas de resolución mayores de forma piramidal, es decir, a partir de cualquier escala se puede obtener cualquier escala posterior. Ello es bastante natural si consideramos t como un factor de resolución de la imagen donde podemos pasar de una resolución dada a cualquier otra posterior. Sin embargo, este sencillo principio elimina ya algunos modelos de Análisis Multiescala presentados en la sección anterior.

Ejemplo 1 *Si consideramos el Análisis Multiescala* $T_t(f)$ *generado por la convolución (1) tomando como núcleo el que corresponde a la media,* $K_m(t,x)$, *dicho Análisis Multiescala no satisface el principio de causalidad. Efectivamente, como la convolución. se puede interpretar en términos de transformada de fourier como un producto, es fácil comprobar que en este caso el operador de transición* $T_{t,t+h}(f)$ *tendría como transformada de Fourier la función* $\frac{t \sin(w(t+h))}{(t+h)\sin(wt)}$ *que no posee antitransformada salvo que* h *sea un múltiplo de* t

Un principio más restrictivo que éste ha sido utilizado habitualmente en la teoría de semigrupos, donde se impone que $T_{t,t+h} = T_h$ es decir:

Definición 3 Causalidad Fuerte. *Diremos que $T_t(f)$ verifica el principio de causalidad. fuerte si $\forall t, h \geq 0$ se tiene que:*

$$T_{t+h}(f) = T_h \circ T_t(f)$$

Es fácil comprobar que los análisis $T_t(f)$ correspondientes a los núcleos de convolución. de gauss y cauchy satisfacen este principio de causalidad fuerte. El siguiente principio que vamos a establecer es el principio de comparación local que nos indica que si una imagen es localmente estrictamente más pequeña que otra en un entorno de un punto, entonces dicha propiedad se conserva para análisis posteriores suficientemente pequeños. Este principio se puede formalizar de la siguiente forma:

Definición 4 Comparación local. *Si $u(x) < v(x)$ en un entorno de un punto x_0, salvo en el propio punto x_0, entonces $\forall t \geq 0$ y h suficientemente pequeño se tiene que $T_{t,t+h}(u)(x_0) \leq T_{t,t+h}(v)(x_0)$*

Este principio se justifica teniendo en cuenta que el orden de los niveles de grises debe ser respetado, es decir el análisis no debe invertir este orden. El siguiente principio que vamos a presentar es un principio de regularidad en el sentido de que si la imagen es una forma cuadrática en un entorno de un punto x_0, es decir $f(x) = c + p^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t A(x - x_0)$ si $\| x - x_0 \| < \varepsilon$, entonces cuando tomamos h próximo a cero, entonces $T_{t,t+h}(f)$ en el punto x_0 depende básicamente de los valores de c, p y A. Formalmente, esto se puede expresar de la siguiente forma:

Definición 5 Regularidad. *Existe una función $F(A, p, c, x, t)$ continua con respecto a A, tal que si $f(x) = c + p^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t A(x - x_0)$ en un entorno de x_0, entonces:*

$$Lim_{h \to 0^+} \frac{T_{t,t+h}(f) - f}{h}(x_0) = F(A, p, c, x_0, t)$$

Este principio nos indica que una forma cuadrática que representa una imagen muy regular, evoluciona también de forma regular. De los núcleos de convolución presentados en la sección anterior, es fácil comprobar que el análisis $T_t(f)$ generado por el núcleo de gauss verifica este principio tomando como función $F(A, p, c, x, t) = Traza(A)$, es decir la suma de los elementos diagonales de la matriz A. Sin embargo, el análisis $T_t(f)$ generado por el núcleo de cauchy $K_c(t, x)$ no satisface este principio como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2 *Sea considera la función:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & si \quad | x | < M \\ 0 & si \quad | x | \geq M \end{cases}$$

teniendo en cuenta la expresión del núcleo de Cauchy dada en la sección anterior, podemos obtener fácilmente:

$$T_t(f)(0) = \int_{-M}^{+M} \frac{1}{\pi} \frac{tay^2}{t^2 + y^2} dy = \frac{2aM}{\pi} t - \frac{2a \arctan(\frac{M}{t})}{\pi} t^2$$

y por lo tanto

$$Lim_{h \to 0^+} \frac{T_h(f) - f}{h}(0) = \frac{2aM}{\pi}$$

por tanto el límite depende de a pero también de M, lo cual viola el principio de regularidad.

El siguiente principio que vamos a presentar deriva del hecho de que el contraste entre diferentes objetos no debe influir en el análisis $T_t(f)$. Efectívamente, cuando nosotros percibimos un objeto en una imagen, lo hacemos de forma totalmente independiente del contraste con otros objetos presentes. Es decir, la diferencia en niveles de gris de los objetos no determina que percibamos diferentes objetos. De hecho, el nivel de gris como magnitud, es algo completamente relativo y que depende fuertemente de los dispositivos de adquisición. Cuando el ojo humano percibe dos objetos en la imagen no calcula diferencias de niveles de grises. Es decir, el hecho de que la diferencia de niveles de grises sea 40, 60, 80, etc. es algo completamente irrelevante en el análisis. Por tanto el análisis $T_t(f)$ debe ser invariante por cambios de contraste. Un cambio de contraste viene dado por la combinación de la imagen $f : \Re^n \to \Re$ con cualquier función $g : \Re \to \Re$ que sea estrictamente creciente

Este principio de invarianza por contraste se conoce en la literatura, como principio de invarianza morfológica y se fórmula de la siguiente forma:

Definición 6 Invarianza Morfológica. *Sea $g : \Re \to \Re$ una función estrictamente creciente. entonces dada cualquier imagen $f : \Re^n \to \Re$ se verifica:*

$$T_t(g \circ f) = g \circ T_t(f)$$

Lo que nos indica que da lo mismo hacer el cambio de contraste y a continuación el análisis $T_t(f)$, que primero el análisis $T_t(f)$ y a continuación el cambio de contraste. Estableceremos también un principio ligeramente más fuerte cuando permitimos que la función de contraste $g(.)$ pueda ser también estrictamente decreciente. El hecho de tomar funciones decrecientes, corresponde a realizar una inversión de video de la imagen, que nos indica que percibimos de la misma forma un objeto claro sobre fondo obscuro que el mismo objeto oscuro sobre fondo claro.

Definición 7 Invarianza Morfológica fuerte. *Diremos que un análisis $T_t(f)$ verifica el principio de invarianza morfológica fuerte si verifica el principio de Invarianza morfológica para funciones $g(.)$ estrictamente creciente o decrecientes.*

Estos principios morfológicos son incompatible con la linealidad, por tanto, los análisis $T_t(f)$ generados a través de convoluciones, que son lineales, no pueden satisfacer este principio.

Ejemplo 3 *Consideremos el caso de un análisis $T_t(f)$ lineal dado por una convolución. La invarianza morfológica implicaría:*

$$\int_{\Re^n} K(t, y - x)(g \circ f)(y)dy = g \circ \int_{\Re^n} K(t, y - x)f(y)dy$$

para cualquier función creciente g y cualquier imagen f. Si $g(.)$ es lineal, es decir $g(s) = as + b$, entonces la anterior igualdad se cumple. Sin embargo, normalmente los cambios de contraste son no-lineales, en cuyo caso la anterior igualdad no se cumple. Tomese por ejemplo $g(s) = s^3$.

Ejemplo 4 *Veamos como existen sin embargo otro tipo de análisis $T_t(f)$ que sí verifican la invarianza morfológica. Consideremos el análisis $T_t(f)$ definido por:*

$$T_t(f)(x) = \sup_{y \in B_t(x)} f(y) \tag{4}$$

donde $B_t(x)$ representa la bola centrada en x y de radio t. Este operador se conoce con el nombre de dilatación en la terminología de la teoría de la morfología matemática. La invarianza morfológica se verifica trivialmente puesto que si $g : \Re \to \Re$ es estrictamente creciente, entonces $\sup(g \circ f) =$

$g \circ \sup(f)$. *(Sin embargo no se verifica el principio de invarianza morfológica fuerte). Por otro lado, este análisis verifica todos los principios propuestos anteriormente. Efectivamente la comparación local es trivial dada la forma del análisis. La causalidad y la regularidad salen de las siguientes estimaciones fáciles de comprobar.*

$$T_{t+h}(f)(x) = \sup_{y \in B_{t+h}(x)} f(y) =$$

$$= \sup_{y \in B_h(x)} \left(\sup_{y \in B_t(x)} f(y) \right) = T_h(f) \circ T_t(f)$$

además, si $f(x) = c + p^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t A(x - x_0)$ *se tiene:*

$$Lim_{h \to 0^+} \frac{T_{t,t+h}(f) - f}{h}(x_0) = \| p \|$$

Los siguientes y últimos principios que plantearemos están referidos a las de invarianza geométrica. El primero de ellos es la invarianza euclidiana que determina que el análisis es completamente independiente de la posición y orientación en el espacio y se formaliza de la siguiente manera

Definición 8 Invarianza Euclidiana. *Sea* $B \in \Re^n \times \Re^n$ *una matriz ortonormal y* $b \in \Re^n$ *un vector. Se considera la transformación* $h_{B,b} : \Re^n \to \Re^n$ *definida por* $h_{B,b}(x) = Bx + b$. *Entonces se verifica:*

$$T_t(f \circ h_{B,b}) = T_t(f) \circ h_{B,b}$$

es decir, es lo mismo trasladar y rotar antes o después de aplicar el análisis $T_t(f)$. *Este principio nos indica que no hay preferencia por ninguna posición u orientación en el espacio.*

El último principio que vamos a establecer es la invarianza por transformaciones afines generales.

Definición 9 Invarianza afín. *Sea* $A \in \Re^n \times \Re^n$ *una matriz no singular y* $b \in \Re^n$ *un vector. Se considera la transformación* $h_{A,b} : \Re^n \to \Re^n$ *definida por* $h_{A,b}(x) = Ax + b$. *Entonces se verifica que existe una función* $t'(t, A)$ *tal que*

$$T_t(f \circ h_{A,b}) = T_{t'(t,A)}(f) \circ h_{A,b}$$

además $\frac{\partial t'}{\partial \lambda}(t, \lambda Id) > 0$.

La condición $\frac{\partial t'}{\partial \lambda}(t, \lambda) > 0$ se puede interpretar de la siguiente manera: Si consideramos la afinidad $A = \lambda Id$ que corresponde a una expansión de la imagen, entonces, cuanto mayor sea λ mayor es la escala necesaria en el análisis para recuperar la imagen. Por otro lado, ello también nos indica que no podemos esperar en general que $t'(t, A) = t$ como en el caso euclidiano puesto que una afinidad puede cambiar la definición de la imagen y por tanto ello también cambiará la escala.

Si bien la necesidad de la invarianza euclidiana resulta obvia, la importancia de la invarianza afín no parece tan clara. Sin embargo, una afinidad representa como veremos un tipo de proyección particular de un espacio tridimensional a un espacio bidimensional. Consideremos un plano de proyección dado por un punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores directores $m = (m_1, m_2, m_3)$ y $n = (n_1, n_2, n_3)$. Un punto en el plano se representará como $p + \hat{x}m + \hat{y}n$, donde $(\hat{x}, \hat{y})$ representan las coordenadas locales del punto en el plano. Si consideramos por simplicidad que el foco o punto a través del cual realizamos la proyección es el $(0,0,0)$, entonces, dado un punto (x,y,z) en el espacio su proyección $(\hat{x},\hat{y})$ en el plano a través del punto $(0,0,0)$ viene dada por las dos expresiones siguientes:

$$\hat{x} = \frac{-x(p_2n_3-p_3n_2)-y(p_3n_1-p_1n_3)-z(p_1n_2-p_2n_1)}{x(m_2n_3-m_3n_2)+y(m_3n_1-m_1n_3)+z(m_1n_2-m_2n_1)}$$

$$\hat{y} = \frac{-x(m_2p_3-m_3p_2)-y(m_3p_1-m_1p_3)-z(m_1p_2-m_2p_1)}{x(m_2n_3-m_3n_2)+y(m_3n_1-m_1n_3)+z(m_1n_2-m_2n_1)}$$

donde en el denominador aparece la ecuación de un plano paralelo al plano de proyección que pasa por foco. Ahora bien, si nosotros tenemos en nuestro mundo tridimensional un objeto incluido en un plano (una puerta, una ventana, los lados de una mesa, etc...) la proyección anterior que es una aplicación de $\Re^3$ en $\Re^2$ se puede entender como una aplicación de $\Re^2$ en $\Re^2$. Efectívamente, si establecemos un sistema de referencia en el plano donde se encuentra el objeto, cualquier punto del objeto (o del plano) se puede escribir como $(x,y,z) = q + \tilde{x}l + \tilde{y}r$ donde $g,l,r \in \Re^3$ y $(\tilde{x},\tilde{y})$ representan las coordenadas locales del objeto. Por tanto, la fórmula que determina la proyección, también determina una correspondencia entre $(\tilde{x},\tilde{y})$ y $(\hat{x},\hat{y})$. Esta aplicación es una afinidad en el caso particular de que el objeto se encuentre en un plano paralelo al plano de proyección en cuyo caso el denominador de las fórmulas que determinan la proyección es constante. Este es el caso, por ejemplo, de tomar diferentes fotografías de un objeto plano, moviendonos en planos paralelos a él. Tendremos que la proyección del objeto en cada fotografía corresponde a diferentes afinidades del objeto. Si el objeto no se encuentra en un plano paralelo al plano de proyección pero la distancia entre el objeto y el punto de proyección es mucho mayor que la distancia entre el punto de proyección y el plano de proyección, lo que sucede habitualmente en una cámara fotográfica, entonces, el denominador de la fórmula que determina la proyección fluctúa poco. En este caso, una afinidad representa una aproximación de una transformación proyectiva entre planos. Bajo este punto de vista, la invarianza afín es muy importante porque representa un primer paso para abordar el problema de la invarianza proyectiva necesaria para el reconocimiento de objetos tridimensionales a través de sus proyecciones en planos.

Para profundizar sobre las aplicaciones de la geometría proyectiva al tratamiento de imagenes vease [Fau93].

4 Resultados Generales de la Teoría

En esta sección enunciaremos algunos teoremas que determinan a partir de los principios enunciados en la sección anterior como son los Análisis Multiescala posibles.

Teorema 1 (Fundamental) . *Si un Análisis Multiescala $T_t(f)$ satisface causalidad, comparación local y regularidad, entonces $u(t,x) = T_t(f)(x)$ es una solución de viscosidad de la siguiente ecuación diferencial:*

$$u_t(t,x) = F(D^2u, Du, u, x, t) \tag{5}$$

donde D^2u representa la matriz de segundas derivadas espaciales de la función $u(t,x)$, Du es el vector gradiente y $F(A,p,c,x_0,t)$ la función definida en el principio de regularidad. Por otro lado, si $u(t,x)$ es una solución de viscosidad de la anterior ecuación el análisis $T_t(f)$ definido por $T_t(f)(x) = u(t,x)$ satisface los principios de causalidad, comparación local y regularidad.

Una primera versión de este teorema fue demostrada en [AGLM93]. Para una demostración simplificada vease [AM94b] (Apéndice 1). Este resultado nos muestra la íntima relación entre los análisis multiescalas y las ecuaciones en derivadas parciales.

La Teoría de soluciones de viscosidad de ecuaciones en derivadas parciales, vease por ejemplo [CIL92] desarrollada por M.G. Crandal, P.L. Lions, etc.. permite definir y estudiar soluciones incluso discontinuas de ecuaciones diferenciales y es un marco adecuado para el estudio de ecuaciones fuertemente no-lineales donde los métodos clásicos resultan insuficientes.

Consideremos el análisis $T_t(f)$ dado por la convolución con una gaussiana. En este caso observamos que la función $F(.)$ definida en el principio de regularidad es $F(A, p, c, x_0, t) = Traza(A)$. Por tanto la ecuación diferencial asociada es :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + \ldots = \Delta u \tag{6}$$

Otro Ejemplo que ya podemos presentar es el caso del análisis dado por la dilatación $T_t(f)(x) = \sup_{y \in B_t(x)} f(y)$. En este caso habíamos observado que la función $F(.)$ viene dada por $F(A, p, c, x_0, t) = \parallel p \parallel$ y por tanto la ecuación diferencial asociada es:

$$u_t = \parallel Du \parallel \tag{7}$$

El siguiente resultado nos muestra como la ecuación del calor (6) o equivalentemente la convolución con una función gaussiana. representa un caso especial dentro de los Análisis Multiescala lineales.

Teorema 2 *La ecuación del calor determina el único Análisis Multiescala lineal que satisface causalidad fuerte, comparación local, e invarianza euclidiana.*

Este resultado clásico ha sido demostrado por varios autores en distintos trabajos, como Koenderink, Babaud, Witkin,etc. En el contexto de esta teoría una demostración de este resultado puede encontrarse en [AGLM93]. Por lo tanto, en el contexto de estos principios, dentro de la clase de análisis $T_t(f)$ lineales, el mejor es el asociado a la ecuación del calor. Sin embargo este análisis no satisface la invarianza morfológica ni la invarianza afín. Para llegar a ellas deberemos trabajar con análisis $T_t(f)$ no-lineales.

A continuación nos centraremos en el caso de dimensión 2. El siguiente resultado, demostrado también en [AGLM93] simplifica considerablemente la forma del Análisis Multiescala.

Teorema 3 *Si un Análisis Multiescala satisface causalidad, comparación local, regularidad, invarianza morfológica e invarianza euclídea entonces $u(t, x, y) = T_t(f)(x, y)$ es una solución de viscosidad de la siguiente ecuación diferencial:*

$$u_t = \parallel \nabla u \parallel G(t, curv(u)) \tag{8}$$

donde $curv(u)$ denota la curvatura de las lineas de nivel, es decir, cada punto (t, x, y) está incluido en una linea de nivel de la forma:

$$\{(x, y) \quad : \quad u(t, x, y) = C\}$$

lo que determina una curva que tendrá una cierta curvatura. En términos de derivadas parciales la curvatura se puede escribir como:

$$curv(u) \ = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

veamos con algo más de detalle esta fórmula. Dado un punto (t_0, x_0, y_0) del conjunto $\{(x,y) : u(t,x,y) = C\}$ existe una curva $(x(s), y(s))$, $(x_0, y_0) = (x(s_0), y(s_0))$ y

$$u(t, x(s), y(s)) = C \qquad \forall s \tag{10}$$

La curvatura en el punto (x_0, y_0) de la curva, viene dada por la razón entre la variación del ángulo de la pendiente y la variación de la longitud de arco. Formalmente esto se escribe como:

$$curv(u)(t_0, x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\arctan(\frac{y'(s_0+h)}{x'(s_0+h)}) - \arctan(\frac{y'(s_0)}{x'(s_0)})}{\int_{s_0}^{s_0+h} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds}$$

un cálculo directo de este límite nos lleva a:

$$curv(u)(t_0, x_0, y_0) = \frac{y''(s_0)x'(s_0) - y'(s_0)x''(s_0)}{(x'(s_0)^2 + y'(s_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

veamos como podemos expresar la curvatura en términos de derivadas parciales de la función $u(t, x, y)$ para obtener la expresión (9). Si derivamos respecto a s la igualdad (10) obtenemos:

$$u_x(t, x(s), y(s))x'(s) + u_y(t, x(s), y(s))y'(s) = 0$$

por tanto existe una función $\gamma(s)$ tal que

$$\begin{aligned} x'(s) &= \gamma(s) u_y(t, x(s), y(s)) \\ y'(s) &= -\gamma(s) u_x(t, x(s), y(s)) \end{aligned}$$

finalmente sustituyendo estas expresiones en (11) obtenemos la fórmula (9) que determina la curvatura en términos de derivadas parciales.

La curvatura de las lineas de nivel es una propiedad intrínseca de la geometría de dichas curvas y por supuesto no depende en absoluto de los cambios de contraste. De hecho, como conclusión del teorema anterior observamos que la curvatura es el único operador diferencial de segundo orden que verifica esta propiedad.

Ejemplo 5 *Si en la ecuación general anterior (8) consideramos como casos particulares* $G(t, curv(u)) = \pm 1$ *obtenemos los operadores de la morfología matemática conocidos como dilatación y erosión que corresponden a las ecuaciones diferenciales:*

$$u_t = \pm \parallel \nabla u \parallel$$

Otro ejemplo de ecuación muy conocida que cae dentro de este grupo es la ecuación de curvatura media que corresponde a elegir $G(t, curv(u)) = t \cdot curv(u)$. *Es decir:*

$$u_t = \parallel \nabla u \parallel t \cdot curv(u)$$

esta ecuación tiene la propiedad de que verifica además el principio de invarianza morfológica en sentido fuerte, es decir es invariante por cambios de contrastes crecientes y decrecientes y esta normalizada respecto a la escala, es decir es invariante por transformaciones del tipo $(t, (x, y), u) \to (\lambda t, (\lambda x, \lambda y), u)$, *una forma equivalente de escribir esta ecuación es la siguiente*

$$u_t = t \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2}$$

el operador diferencial de segundo orden que se encuentra a la derecha de la igualdad, puede interpretarse como la derivada direccional de la función $u(t,x,y)$ siguiendo la dirección ortogonal al gradiente, que corresponde a la dirección de mínima variación de la función $u(t,x,y)$. Por tanto podemos decir que la ecuación produce una difusión de la imagen a lo largo de las lineas de nivel.

Veamos una interpretación geométrica de la ecuación general (8) que nos permite visualizar como evoluciona una forma presente en la imagen a través de las escalas. Por una forma entendemos cualquier componente conexa de una linea de nivel dada por $\{(x,y) \quad : \quad u(t,x,y) = C\}$.

Consideremos como antes que dicha curva se puede parametrizar como $(x(s), y(s))$. La dirección normal a la curva en cada punto s viene dada por el vector:

$$\vec{n} = \frac{(-y'(s), x'(s))}{\sqrt{x'(s_0)^2 + y'(s_0)^2}}$$

si expresamos la normal en términos de derivadas parciales de $u(t,x,y)$ obtenemos:

$$\vec{n} = \frac{\nabla u}{\| \nabla u \|}$$

denotemos ahora por $(x(t,s), y(t,s))$ a la evolución de la forma o linea de nivel a través de las escalas, es decir $u(t, x(t,s), y(t,s)) = C$. Si derivamos esta expresión respecto a t, obtenemos:

$$u_t + x_t u_x + y_t u_y = 0$$

si sustituimos u_t por su valor siguiendo la ecuación (8) obtenemos:

$$x_t \frac{u_x}{\| \nabla u \|} + y_t \frac{u_y}{\| \nabla u \|} = -G(t, curv(u)) \tag{12}$$

por tanto el sistema de ecuaciones

$$(x_t, y_t) = -G(t, curv(u))\vec{n}$$

determina una solución de la anterior ecuación que podemos interpretar geométricamente como que un punto se mueve siguiendo la dirección normal a una velocidad que viene dada por la función $G(t, curv(u))$. Nótese que la evolución de un punto depende exclusívamente de la geometría de la linea de nivel donde se encuentra y no depende en absoluto de la presencia de otras líneas de nivel cercanas.

Ejemplo 6 *Consideremos el caso en que $(x(t,s), y(t,s))$ una familia de circunferencias de radio $R(t) = \sqrt{x^2(t,s) + y^2(t,s)}$. La ecuación anterior es equivalente a:*

$$x_t = -G(t, \frac{1}{R(t)})\frac{x}{R(t)}$$
$$y_t = -G(t, \frac{1}{R(t)})\frac{y}{R(t)}$$

de donde podemos obtener fácilmente que $R(t)$ satisface la ecuación:

$$R'(t) = -G(t, \frac{1}{R(t)})$$

las soluciones de esta ecuación determinan la evolución del radio. Por ejemplo en el caso de la dilatación o erosión ($G \equiv \pm 1$) obtenemos que $R'(t)$ es constante lo cual significa que el radio de las circunferencias disminuye o aumenta, (siguiendo el signo de G) a la misma velocidad. Es decir $R(t) = R_0 \mp t$.
En el caso de considerar la ecuación de la curvatura media ($G(t,k) = tk$, obtenemos que el radio $R(t)$ satisface:

$$R'(t) = -\frac{t}{R(t)}$$

y esta ecuación tiene por solución $R(t) = \sqrt{R_0^2 - t^2}$. Lo que determina la evolución del radio

Como puede constatarse existe un ámplio abánico de posibilidades, cambiando la elección de la función $G(t,s)$, de modelos de Análisis Multiescala que verifican todos los principios propuestos salvo la invarianza afín. Para finalizar esta sección expondremos el "gran" resultado de esta teoría: existe un único modelo que verifica todos los invariantes propuestos hasta ahora más la invarianza afin. El resultado que vamos a presentar fue obtenido por dos grupos de trabajo de manera independiente. Por un lado un grupo formado por investigadores de la Universidad Paris IX y la Universidad de Las Palmas, y por otro lado otro grupo formado por investigadores americanos e israelies (vease [SA92],[SA93]).

Teorema 4 *Existe un único Análisis Multiescala normalizado respecto a la escala satisfaciendo causalidad, comparación local, regularidad, invarianza morfológica fuerte e invarianza afín, y viene dado por la ecuación*

$$u_t = t^{\frac{1}{3}} \left(u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} \right)^{\frac{1}{3}} \qquad (13)$$

Además, dada una afinidad definida por una matriz A, se tiene que $t'(t,A) = t\sqrt{\det(A)}$.

La primera demostración de este resultado a través de una formalización axiomática se encuentra en [AGLM93]. En lugar de concentrarnos en la demostración del resultado, nos centraremos en su interpretación. En primer lugar nótese que esta ecuación corresponde a un caso particular de la ecuación general (8) tomando $G(t,s) = t^{\frac{1}{3}} s^{\frac{1}{3}}$.

A continuación veremos las implicaciones de la invarianza afín que nos indica que para cualquier transformación

$$h_{A,b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

y para cualquier $t \geq 0$, existe $t' = t\sqrt{\det(A)}$ tal que

$$T_t(f \circ h_{A,b}) = T_{t\sqrt{\det(A)}}(f) \circ h_{A.b}$$

Veamos ahora que esta igualdad implica que efectívamente la ecuación está normalizada respecto a la escala . La transformación $(x,y) \to (\lambda x, \lambda y)$ es una afinidad que tiene por determinante $\det(A) = \lambda^2$. Por tanto siguiendo el resultado del teorema tendremos que $t'(t,A) = t\lambda$, por tanto, si $u(t,x,y)$ es una solución de la ecuación, entonces dada cualquier constante λ, $v(t,x,y) = u(t\lambda, x\lambda, y\lambda)$ también es solución.

Consideremos ahora una afinidad más compleja dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $\det(A) = \lambda\gamma$. A título ilustrativo comprobemos que efectivamente la invarianza afín se verifica. Veamos que si $u(t,x,y)$ es solución, entonces $v(t,x,y) = u(t\sqrt{\lambda\gamma}, x\lambda, y\gamma)$ también es solución. Eféctivamente, podemos escribir

$$v_t(t,x,y) = \sqrt{\lambda\gamma}u_t(t\sqrt{\lambda\gamma}, x\lambda, y\gamma) = \sqrt{\lambda\gamma}\left(t\sqrt{\lambda\gamma}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left((u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy})(t\sqrt{\lambda\gamma}, x\lambda, y\gamma)\right)^{\frac{1}{3}} = t^{\frac{1}{3}}\left((v_y^2 v_{xx} - 2v_x v_{xy} + v_x^2 v_{yy})(t,x,y)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Veamos ahora que sucede cuando una linea de nivel inicial corresponde a una circunferencia. Razonando como hemos hecho anteriormente podemos deducir que si $R(t)$ es el radio de la circunferencia en la escala t, dicho radio verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$R'(t) = -\frac{t^{\frac{1}{3}}}{R(t)^{\frac{1}{3}}}$$

cuya solución es :

$$R(t) = \left(R_0^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

donde R_0 corresponde al radio inicial de la circunferencia. Otra propiedad interesante es que bajo este análisis una elipse evoluciona como una elipse que va disminuyendo de tamaño a través de las escalas. Ello es una consecuencia de que cualquier elipse puede transformarse en una circunferencia a través de una afinidad. Por lo tanto es equivalente hacer evolucionar a una elipse que a una circunferencia.

5 Otros Ejemplos de Análisis Multiescala.

Hemos visto en la sección anterior como estableciendo un conjunto de principios es posible formalizar desde el punto de vista matemático la teoría del Análisis Multiescala. Además hemos demostrado como esta formalización nos permite deducir un nuevo modelo que satisface todos los principios. Sin embargo, si el objetivo que nos planteamos con el Análisis Multiescala es otro. Por ejemplo queremos restaurar la imágen, eliminar ruidos dejando intactos los objetos importantes, entonces otro tipo de Análisis es necesario. En esta sección mostraremos algunos ejemplos de Análisis Multiescala utilizados en la literatura. Todos tienen como denominador común que pueden expresarse como una ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$u_t = F(D^2u, Du, u, t)$$

Perona y Malik [PM90] propusieron en un trabajo pionero un módelo para la eliminación de ruidos de una imagen basado en la siguiente ecuación diferencial:

$$u_t = div(g(\parallel \nabla u \parallel)\nabla u)$$

donde la función $g(.)$ es una función positiva y decreciente. En este modelo se pretende homogeneizar la imagen en las regiones donde el gradiente es bajo, y por otro lado disminuir la potencia del filtrado en el caso en que el gradiente es alto que se supone corresponde a las zonas donde hay un borde bien definido. Las funciones $g(.)$ propuestas por los autores son:

$$g(s) = e^{-ks^2} \quad y \quad g(s) = \frac{k}{s^2 + k}$$

donde k es una constante positiva.

Este modelo posee la limitación de que no elimina discontinuidades muy localizadas como pueden ser ruidos aislados debido a que en estas zonas el gradiente es alto. Para eliminar estas limitaciones y otras de tipo más teórico, Coll, Catté, Lions y Morel [CCLM92] propusierón otro modelo basado en la siguiente ecuación

$$u_t = div(g(\parallel \nabla(K_\sigma * u) \parallel)\nabla u)$$

donde antes de evaluar la función $g(.)$ se convoluciona la imagen con un núcleo de convolución de tipo gaussiano como los vistos en la segunda sección.

Todos estos modelos donde se discrimina la difusión siguiendo el valor del gradiente son incompatibles con el principio de invarianza morfológica que nos dice que el análisis no puede depender del contraste entre objetos. Por ello si nuestro objetivo es conservar los bordes de la imagen a través de las escalas, no podemos imponer el principio de invarianza morfológica.

Muchas veces, las imágenes originales de las cuales queremos extraer información presentan los bordes de una manera difusa, lo que dificultad el reconocimiento de los objetos. Este efecto se conoce como "*blurring*". Para intentar recuperar los contrastes en la imagen que sólo aparecen de forma difusa es necesario generar discontinuidades en la imagen cerca de los bordes de los objetos para mejorar la nitidez.

Los primeros en plantearse este problema desde un punto de vista de ecuaciones en derivadas parciales fueron Osher y Rudin [OR90] que propusieron un modelo basado en la ecuación

$$u_t = -sign(\mathcal{L}(u)) \parallel \nabla u \parallel$$

donde la función $sign(s)$ and $\mathcal{L}(u)$ vienen dadas por:

$$sign(s) = \begin{cases} 1 & si \quad s \geq 0 \\ -1 & si \quad s < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u) = u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}$$

esta ecuación, que ellos denominan filtro de choque, tiende a generar discontinuidades en los pasos por cero del operador $\mathcal{L}(u)$ que corresponde a la localización de los bordes.

Por último, combinando estas ideas con otras precedentes Alvarez y Mazorra [AM94a] propusieron un modelo que se basa en difundir la imágen siguiendo la dirección de los bordes para conseguir la eliminación de ruido y al mismo tiempo generar discontinuidades en la dirección ortogonal a los bordes que corresponde a la dirección del gradiente de u. Dicho modelo se basa en la siguiente ecuación diferencial

$$u_t = (curv(u) - C \cdot sign(\mathcal{L}(u))) \parallel \nabla u \parallel$$

donde C es una constante positiva.

Por supuesto, explicar con detenimiento estas ecuaciones y sus implicaciones requiere mucho mayor tiempo y espacio del dedicado aqui. Sirva esta sección a título introductorio, invitando al lector a dirigirse a los artículos de referencia para un estudio más detallado.

References

[AE97] L. Alvarez and J. Esclarin. Image quantification using reaction-diffusion equations. *SIAM J. on Applied Mathematics.*, 57(1):153–175, 1997.

[AGLM92a] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Analyse multiechelle de films. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315(1):1145–1148, 1992.

[AGLM92b] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axiomatization et nouveaux operateurs de la morphologie mathematique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315(1):265–268, 1992.

[AGLM92c] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axiomes et equations fondamentales du traitement d'images (analyse multiechelle et e.d.p.). *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315(1):135–138, 1992.

[AGLM93] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and J.M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. for Rat. Mechanics*, 123(3):199–257, 1993.

[ALM92] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (ii). *SIAM J. on Numerical Analysis*, 29(3):845–866, 1992.

[AM94a] L. Alvarez and L. Mazorra. Signal and image restoration using shock filter and anisotropic diffusion. *SIAM J. on Numerical Analysis*, 31(2):590–605, 1994.

[AM94b] L. Alvarez and J.M. Morel. Formalization and computational aspects of image analysis. *Acta Numerica*, pages 1–61, 1994.

[AM94c] L. Alvarez and J.M. Morel. *A morphological approach to multiscale analysis. From principles to equations*, pages 249–276. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[CCLM92] F. Catté, T. Coll, P.L. Lions, and J.M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29(1):182–193, February 1992.

[CIL92] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial diferential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, (27):1–67, 1992.

[Fau93] O. Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*. MIT Press, 1993.

[Olv93] P. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag, 1993.

[OR90] S. Osher. and L. Rudin. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM J. Numer. Anal.*, (27):919–940, 1990.

[PM90] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (12):429–439, 1990.

[SA92] G. Sapiro and Tannenbaum A. On affine plane curve evolution. *Journal of Functional Analysis*, (821), February 1992. submitted.

[SA93] G. Sapiro and Tannenbaum A. Affine invariant scale-space. *International Journal of Computer Vision*, 11:25–44, 1993.