ACTIVIDAD #9 – EL DIFERENCIAL

Nombre:____

El diferencial: Cambio vertical en el plano tangente como función del cambio horizontal

Sea *f* una función de dos variables independientes *x* y *y*. El plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $\left(a,b,f\left(a,b\right)\right)$ tiene pendiente en dirección *x* igual a $f_x(a,b)$ y pendiente en dirección y igual a $f_y(a,b)$.

Por lo tanto el cambio vertical desde el punto $\left(a,b,f\left(a,b\right)\right)$ a un punto $\left(x,y,z\right)$ cualquiera en el plano tangente es:

$$dz = m_x dx + m_y dy$$

Esto puede escribirse como:

$$df(a,b) = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy \text{ donde}$$

$df(a,b)$ denota el cambio vertical total en el plano tangente, o sea, $z - f\left(a,b\right)$

dx es una variable independiente que denota el cambio horizontal en dirección *x*

dy es una variable independiente que denota el cambio horizontal en dirección *y*

***df* (*a*, *b*)** se llama el **diferencial de *f* en el punto (*a*, *b*).** Expresa el cambio vertical *df* (*a*, *b*) en el plano tangente en el punto (*a*, *b*) como una función de las dos variables independientes *dx*, *dy* que representan el cambio horizontal.

Observe la relación entre la ecuación punto-pendientes del plano tangente en el punto $\left(a,b,f\left(a,b\right)\right)$:

$$z - f\left(a,b\right) = f_x\left(a,b\right)\left(x-a\right) + f_y\left(a,b\right)\left(y-b\right)$$

y el diferencial en el punto $\left(a,b\right)$:

$$df(a,b) = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$

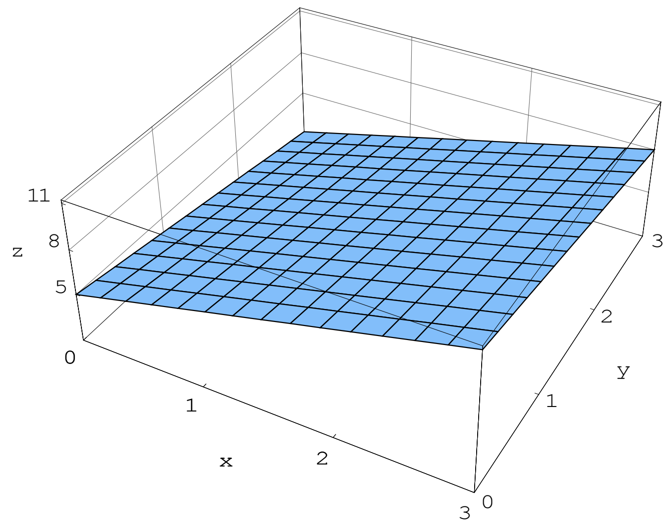
1. Sea $f(x,y) = x^3 y$.
   a. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $(1,2)$ y exprésela en la forma $z - f\left(a,b\right) = f_x\left(a,b\right)\left(x-a\right) + f_y\left(a,b\right)\left(y-b\right)$.
   b. Use la ecuación de la parte anterior para hallar el diferencial de *f* en el punto $(1,2)$.
   c. Evalúe el diferencial que halló para $dx = 0.1$ y $dy = 0.2$. También evalúe el diferencial que halló para $dx = 3$ y $dy = 4$.

2. La siguiente es una tabla del plano tangente a la gráfica de $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2,5)$.

x | y	**1**	**2**	**3**
0	4	7	10
1	2	5	8
2	0	3	6

   a. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $(1,2)$ y exprésela en la forma $z - f\left(a,b\right) = f_x\left(a,b\right)\left(x-a\right) + f_y\left(a,b\right)\left(y-b\right)$.
   b. Use la ecuación de la parte anterior para hallar el diferencial de *f* en el punto $(1,2)$.
   c. Evalúe el diferencial que halló para $dx = 0.2$ y $dy = -0.3$. También evalúe el diferencial que halló para $dx = -5$ y $dy = 1$.

3. La siguiente es la gráfica del plano tangente a la gráfica de $z = f(x,y)$ en el punto (3,0,11).
   a. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de *f* en el punto (3,0) y exprésela en la forma $z - f\left(a,b\right) = f_x\left(a,b\right)\left(x-a\right) + f_y\left(a,b\right)\left(y-b\right)$.
   b. Use la ecuación de la parte anterior para hallar el diferencial de *f* en el punto (3,0).
   c. Evalúe el diferencial que halló para $dx = -0.2$ y $dy = 0.3$. También evalúe el diferencial que halló para $dx = -4$ y $dy = 1$.



4. Sea $f(x, y) = x^3 y^2 + x$.
   a. Halle $df(x, y)$. La contestación es una función de 4 variables independientes: *x*, *y*, *dx*, *dy*.
   b. Halle $df(1, 2)$. La contestación es una función de 2 variables independientes: *dx*, *dy*.
   c. Halle $df(3,1)$.
   d. Halle $df(4,-2)$.

5. Suponga que la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto (1,2,5) está dada por $2x - 3y + z = 1$.
   a. Halle el diferencial de *f* en el punto (1,2).
   b. ¿Cuál es la relación entre la gráfica del plano tangente (en el punto (1,2,5)) y la gráfica del diferencial (en el punto (1,2)? (La gráfica del diferencial se hace representando *dx* y *dy* en los ejes horizontales y los valores de *df*(1,2) en el eje vertical).

El diferencial y el cambio vertical en el plano tangente como aproximación al cambio en los valores de una función

6. Use un programa para graficar funciones[1] de dos variables para graficar juntas y comparar las gráficas de $f(x, y) = xy^2 + 1$ y de su plano tangente en el punto $(2,1, f(2,1))$ en cada uno de los siguientes rectángulos. Asegúrese de mostrar cómo halló la ecuación del plano tangente. En cada caso imprima la gráfica resultante.
   a. $2 \le x \le 3$ y $1 \le y \le 3$
   b. $2 \le x \le 2.1$ y $1 \le y \le 1.2$
   c. $2 \le x \le 2.01$ y $1 \le y \le 1.02$
   d. Describa lo que observó en las partes anteriores.

7. Sea $f(x, y) = xy^2 + 1$.
   a. Halle $df(x, y)$.
   b. Halle $df(2,1)$
   c. Complete la siguiente tabla:

Cambio horizontal	Use el diferencial para hallar el cambio vertical en el plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $(2,1, f(2,1))$.	Cambio vertical en la gráfica de la función.	% de error
$dx = 1$, $dy = 2$			
$dx = 0.1$, $dy = 0.2$			
$dx = 0.01$, $dy = 0.02$			

   d. ¿Cuál es la relación entre este problema y el problema anterior?

[1] Por ejemplo, el siguiente comando en el programa *Mathematica* produce la gráfica de la función en rojo y la del plano tangente en el punto $(2,1, f(2,1))$ en azul. Luego de producir una gráfica en *Mathematica* ésta se puede rotar fácilmente usando el cursor para obtener un buen punto de vista antes de imprimirla:
Plot3D[{*x*∗*y*^2+*x*,2∗*x*+4∗*y*−4},{*x*,2,3},{*y*,1,3},PlotStyle→{Red,Blue}]

El diferencial como cambio vertical en el plano tangente:

8. En la siguiente tabla, cada columna corresponde al plano tangente de $f(x,y)=xy^2$ en el punto dado. Diferentes columnas corresponden a diferentes planos.

   a. Llene la información que falta en la tabla:

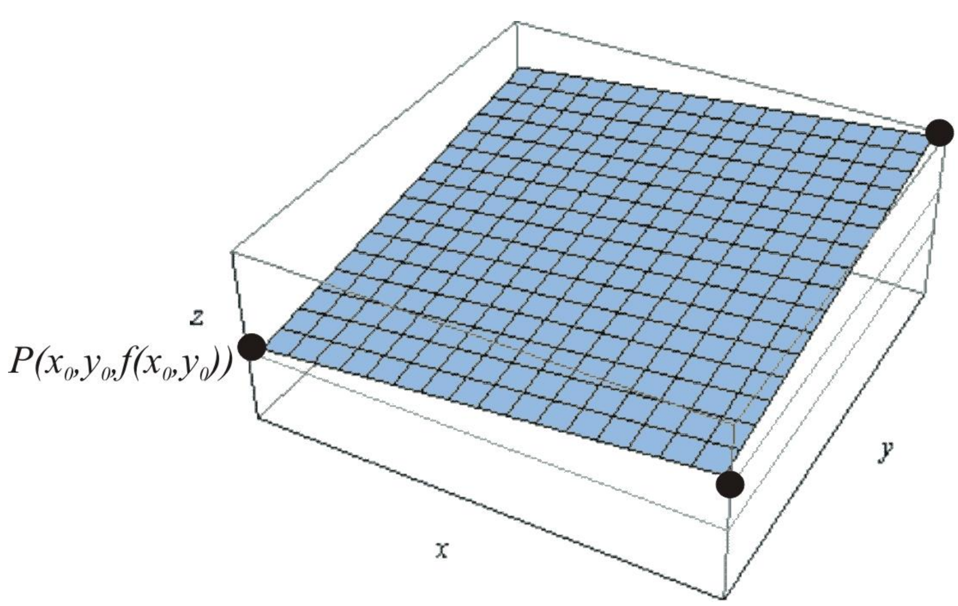
	Plano tangente en el punto (3,-2,12) de la gráfica de *f*	Plano tangente en el punto (2,1,2) de la gráfica de *f*	Plano tangente en el punto (2,-2,8) de la gráfica de *f*
Pendiente en dirección *x*, m_x			
Pendiente en dirección *y*, m_y			
Diferencial de función en punto dado	$df(3,-2)=$	$df(2,1)=$	$df(2,-2)=$
Cambio vertical en dirección *x*, dz_x, si $dx=0.01$			
Cambio vertical en dirección *y*, dz_y, si $dy=0.02$			
Cambio vertical total, $dz=dz_x+dz_y$			
Diferencial de función en punto dado si $dx=0.01$ y $dy=0.02$			

   b. Explique por qué las últimas dos filas de la tabla son iguales.

9. Sea $z=f(x,y)$, (x_0,y_0) un punto inicial en el dominio de *f*, *dx* un cambio en *x*, *dy* un cambio en *y*, con $dx>0$ y $dy>0$. El diagrama a continuación representa un pedazo del plano tangente a la gráfica de *f* en el punto $P\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$.

   a. Identifique en ese diagrama cambios horizontales y verticales *dx*, *dy*, $f_x(x_0,y_0)dx$, $f_y(x_0,y_0)dy$, $df(x_0,y_0)$, todos ellos como longitudes de segmentos **horizontales o verticales** que aparecen en la figura.

   b. Explique en sus propias palabras la relación entre el diferencial y la figura de abajo.



10. Un cono recto circular tiene una base con radio que mide 15 cm y una altura de 45 cm con un error máximo de 0.05 cm en cada una de las medidas. En este problema vamos a usar el diferencial para aproximar el error máximo que puede haber si usamos estas medidas para computar el volumen.
    a. Queremos decir algo del error en el volumen, por ende, necesitamos la fórmula para el volumen V de un cono recto circular como función de su radio r y su altura a. Escriba la fórmula.
    b. Compute dV en un punto genérico (r,a). El resultado debe ser una función de 4 variables independientes: a, r, dr y da .
    c. Compute dV para los valores iniciales dados de radio y altura. El resultado debe ser una función de dos variables independientes: dr y da .
    d. Evalúe el diferencial para los errores máximos dr y da que podemos tener. El resultado debe ser un número (en cm^3).
    e. Compare el valor de dV que obtuvo en la parte anterior con el verdadero cambio en volumen ΔV, hallando el porciento de error.
    f. La figura a continuación representa el plano tangente a la gráfica de $V = f(r,a)$ en el punto $P\left(15,45,f\left(15,45\right)\right)$. Represente en la figura de abajo los cambios horizontales y verticales: dr, $V_r(15,45)dr$, da, $V_a(15,45)da$, y $dV(15,45)$ (todos se representan con segmentos **horizontales o verticales**).