# 循环图的支撑树数与 Euler 环游数的渐近计数定理*

张福基 永学荣**
(厦门大学数学系,厦门 361005) (新疆大学数学系,乌鲁木齐 830046)

**摘要** 研究有向循环图 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$ 支撑树数与 Euler 环游数的渐近性质,得到其支撑树数 $T(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))$ 与 Euler 环游数 $E(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))$ 的渐近公式

$$\left.\begin{aligned} &\lim \frac{1}{k} \sqrt[p]{T(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))} = 1, \\ &\lim \frac{1}{k!} \sqrt[p]{E(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))} = 1, \end{aligned}\right\} \quad p \to \infty.$$

在此基础上得到了其叠线图 Euler 环游与支撑树数的渐近公式. 对无向图也得到了平行的结果.

**关键词** 循环图 支撑树 Euler 环游数 叠线图

自从随机图理论建立以来,一部分数学工作者把注意力从研究单个图的性质转向一类图的整体性质或一类图中几乎所有图的性质. 本文由此角度研究有向循环图的此类性质. 第1和2节中的树、Euler 环游均指有向的,连通指强连通.

有向循环图是一种很一般的通讯网络模型,由文献[1]首先研究,近期工作的综述见文献[2]. 它的叠线图(包括 De Bruijn 图与 Kautz 图等)也在网络设计中有广泛应用[3,4]. 支撑树与 Euler 环游数是网络的两项基本参数,对不同的网络计算过其大小[5~7],这些事实引导人们从总体上来把握此两参数. 本文得到了 $n$ 个顶点度数为 $k$ 的有向循环图的渐近定理. 首先注意下述事实,对于固定的 $p$ 和 $k$, $p$ 个顶点出度为 $k$ 的有向循环图可具有不同数目的支撑树与 Euler 环游,换言之,在此情形下各个顶点邻集的形状是不可忽视的,但从本文的结果可以看出,当顶点数充分大时,支撑树数与 Euler 环游数的渐近行为只依赖于 $k$ 而明显的很少依赖于图的具体结构,对无向循环图也得到同样结果. 这种现象是有趣的但不是仅有的. 关于正则图完美匹配数的渐近计算问题有一个猜想(文献[8]的猜想 8.15),其形式与本文的结果类似,至今为止此猜想只解决了 $k=3$ 的最小非平凡情形.

1998-07-17 收稿
* 国家自然科学基金(批准号:69673042)和香港 CERG 基金资助项目
** 现地址:香港科技大学计算机系,香港

## 1　预备引理

首先回忆一些定义．有向循环图 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$定义为顶点是标号为模 $p$ 的整数的图，对每个顶点 $i$ 有弧从 $i$ 出发到达 $i+s_1$, $i+s_2$, $\cdots$, $i+s_k(\bmod p)$，此处 $1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leqslant p-1$．$C(p_1, s_1, s_2, \cdots, s_k)$强连通的充要条件是：最大公约数$(p_1, s_1, s_2, \cdots, s_k)=1$．

有向图 $D=(V, A)$的有向线图 $L(D)$定义如下：$L(D)$的点表示 $D$ 的弧，即 $V(L(D))=\{uv \mid (u,v) \in A\}$，顶点 $uv$ 与顶点 $wz$ 相邻，若 $u=w$．若 $D$ 为一 $k$-正则有向图，即 $d^+(v)=d^-(v)=k$, $\forall v \in V$(此处 $d^+(v)$与 $d^-(v)$分别为 $v$ 的出度与入度)，则 $D$ 的有向线图也是 $k$-正则的且$|V(L(D))|=k|V(D)|$, $|A(V(L(D)))|=k^2|V(D)|$，进而递推地定义有向叠线图

$$L^0(D)=D,\ L^{i+1}(D)=L(L^i(D)),\ i \geqslant 0.$$

易见 $L^r(D)$也是 $k$-正则的，称为 $D$ 的 $r$ 重叠线图．

为证明本文的主要结果，需要一些引理．

**引理 1**[9]　有向循环图的特征多项式为

$$\chi(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k), \lambda) = \prod_{j=0}^{p-1}(\lambda - \varepsilon^{s_1 j} - \varepsilon^{s_2 j} - \cdots - \varepsilon^{s_k j}),$$

其中 $\varepsilon = \exp\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{p}$.

**引理 2**[10]　设 $D$ 为正则有向图，$\chi(D, \lambda)$为其特征多项式，则 $D$ 的有向支撑树数(简称支撑树数)

$$T(D) = \chi'(D, k) = \frac{d}{d\lambda}\chi(D, \lambda)\mid_{\lambda=k}.$$

因为 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$是 $k$-正则的$(d^+(v)=d^-(v)=k,\ \forall v \in V(D))$，由引理 1 与 2，对 $\chi(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k), \lambda)$求导，取 $\lambda=k$ 有

**引理 3**　有向循环图 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$的支撑树数为

$$T(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)) = \prod_{j=0}^{p-1}(k - \varepsilon^{s_1 j} - \varepsilon^{s_2 j} - \cdots - \varepsilon^{s_k j}),$$

其中 $\varepsilon = \exp\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{p}$.

**引理 4**　若 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$为有向循环图，多项式

$$f(z) = \sum_{i=0}^{s_1-1} z^i + \sum_{i=0}^{s_2-1} z^i + \cdots + \sum_{i=0}^{s_k-1} z^i$$

具有根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_k-1}$，则

$$T(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)) = p\,\frac{(-1)^{(p-1)(s_k-1)}}{f(1)}\prod_{j=1}^{s_k-1}(1-\alpha_j^p), \tag{1}$$

此处 $f(1)=s_1+s_2+\cdots+s_k-k$.

**证**　由引理 3 有

$$T(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)) = \prod_{j=1}^{p-1}(1 - \varepsilon^{s_1 j} + 1 - \varepsilon^{s_2 j} + \cdots + 1 - \varepsilon^{s_k j}) =$$

$$\prod_{j=1}^{p-1}(1-\varepsilon^j)\prod_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{s_1-1}\varepsilon^{ij}+\sum_{i=0}^{s_2-1}\varepsilon^{ij}+\cdots+\sum_{i=0}^{s_k-1}\varepsilon^{ij}\right)=$$
$$p\prod_{j=1}^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{s_1-1}\varepsilon^{ij}+\sum_{i=0}^{s_2-1}\varepsilon^{ij}+\cdots+\sum_{i=0}^{s_k-1}\varepsilon^{ij}\right).$$

最后一步用到

$$\prod_{j=1}^{p-1}(1-\varepsilon^j)=p,$$

此由下式中取 $x=1$ 而得:

$$\prod_{j=1}^{p-1}(x-\varepsilon^j)=\sum_{i=0}^{p-1}x^i. \tag{2}$$

再由 $f(z)$的定义及(2)式有

$$T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))=p\prod_{j=1}^{p-1}f(\varepsilon^j)=p\prod_{j=1}^{p-1}(\varepsilon^j-\alpha_1)\prod_{j=1}^{p-1}(\varepsilon^j-\alpha_2)\cdots\prod_{j=1}^{p-1}(\varepsilon^j-\alpha_{s_k-1})=$$
$$(-1)^{(p-1)(s_k-1)}p\left(\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_1^j\right)\left(\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_2^j\right)\cdots\left(\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_{s_k-1}^j\right)=$$
$$(-1)^{(p-1)(s_k-1)}p\prod_{j=1}^{s_k-1}\frac{1-\alpha_j^p}{1-\alpha_j}=(-1)^{(p-1)(s_k-1)}\frac{p}{f(1)}\prod_{j=1}^{s_k-1}(1-\alpha_j^p).$$

**引理 5** 设 $f(z)$定义如引理 4 且最大公约数$(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$,则 $f(z)$之根

$$|\alpha_i|>1,\ i=1,2,\cdots,s_k-1.$$

**证** 先证明$|\alpha_i|\geqslant1$. 注意到 $f(1)\neq0$ 及$(z-1)f(z)=z^{s_1}+z^{s_2}+\cdots+z^{s_k}-k$. 若有$|\alpha_j|<1$为 $f(z)$之根,则一方面有

$$\alpha_j^{s_1}+\alpha_j^{s_2}+\cdots+\alpha_j^{s_k}=k, \tag{3}$$

另一方面有

$$|\alpha_j^{s_1}+\alpha_j^{s_2}+\cdots+\alpha_j^{s_k}|\leqslant|\alpha_j|^{s_1}+|\alpha_j|^{s_2}+\cdots+|\alpha_j|^{s_k}<k,$$

矛盾.

易见 1 不是 $f(z)$的根. 若$|\alpha_j|=1$,则有

$$\alpha_j=\cos\varphi_j+\sqrt{-1}\sin\varphi_j,\ \sin\varphi_j\neq0,\ j\in\{1,2,\cdots,s_{k-1}\}.$$

代入(3)式有

$$\cos s_1\varphi_j+\cos s_2\varphi_j+\cdots+\cos s_k\varphi_j=k,$$

故 $\cos s_l\varphi_j=1$, $l=1,2,\cdots,k$. 由此知 $\alpha_j$ 为 $m(>1)$次单位根且 $m$ 为 $s_l$ 的最大公约数,此与假定$(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$ 矛盾. 因而$|\alpha_i|>1$, $i=1,2,\cdots,s_k-1$.

## 2 主要结果

设 $C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$为 $p$ 阶有向循环图,以下均假定$(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$,从而它是强连通的.

**定理 1** 对有向循环图 $C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$,有支撑树数的渐近公式

$$T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))\sim pk^p/f(1),\ p\to\infty.$$

**证**　设

$$\sigma_1(p)=\prod_{j=1}^{s_k-1}\alpha_j^p,\ \sigma_2(p)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant s_k-1}\alpha_i^p\alpha_j^p,\ \sigma_3(p)=\sum_{1\leqslant i<j<r\leqslant s_k-1}\alpha_i^p\alpha_j^p\alpha_r^p,\ \cdots,$$

$$\sigma_{s_k-1}(p)=\prod_{j=1}^{s_k-1}\alpha_j^p$$

为 $\alpha_1^p,\alpha_2^p,\cdots,\alpha_{s_k-1}^p$ 之初等对称多项式，则有[11]

$$\prod_{j=1}^{s_k-1}(z-\alpha_j^p)=z^{s_k-1}-\sigma_1(p)z^{s_k-2}+\sigma_2(p)z^{s_k-3}-\sigma_3(p)z^{s_k-4}+\cdots+(-1)^{s_k-1}\sigma_{s_k-1}(p).$$

取 $z=1$，有

$$\prod_{j=1}^{s_k-1}(1-\alpha_j^p)=1-\sigma_1(p)+\sigma_2(p)-\sigma_3(p)+\cdots+(-1)^{s_k-1}\sigma_{s_k-1}(p).$$

注意到当 $p=1$ 时，$\sigma_i=\sigma_i(1)(i=1,2,\cdots,s_k-1)$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s_k-1}$ 的初等对称多项式．由 $f(z)$ 的定义并令 $z=0$，有

$$\sigma_{s_k-1}=(-1)^{s_k-1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{s_k-1}=k.$$

从而有

$$\sigma_{s_k-1}(p)=(-1)^{(s_k-1)p}k^p.$$

由于 $(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$．由引理 5 知 $|\alpha_i|>1$，$i=1,2,\cdots,s_k-1$．今考虑 $\sigma_i(p)/\sigma_{s_k-1}(p)$，$i<s_k-1$．当 $k$ 固定时分子的项数固定而分母只有一项，它是诸模大于 1 的 $\alpha_i$ 的 $p$ 次幂的积，分子的每一项则是其中一部分 $\alpha_i$ 的 $p$ 次幂的积，经约分后分子为 1，分母是一些（至少一个）$\alpha_i$ 的 $p$ 次方幂的积，故有

$$\sigma_i(p)/\sigma_{s_k-1}(p)\to 0,\ p\to\infty.$$

于是可以用引理 4 得

$$\frac{T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))}{\frac{1}{f(1)}pk^p}=$$

$$(-1)^{(p-1)(s_k-1)+(s_k-1)p}(1-\sigma_1(p)+\sigma_2(p)-\sigma_3(p)+\cdots+(-1)^{s_k-1}\sigma_{s_k-1}(p))/\sigma_{s_k-1}(p)=$$

$$\frac{(-1)^{s_k-1}}{\sigma_{s_k-1}(p)}-\frac{(-1)^{s_k-1}\sigma_1(p)}{\sigma_{s_k-1}(p)}+\frac{(-1)^{s_k-1}\sigma_2(p)}{\sigma_{s_k-1}(p)}-$$

$$\frac{(-1)^{s_k-1}\sigma_3(p)}{\sigma_{s_k-1}(p)}+\cdots+\frac{(-1)^{s_k-1}(-1)^{s_k-1}\sigma_{s_k-1}(p)}{\sigma_{s_k-1}(p)}\to 1,\ p\to\infty,$$

定理得证．

由下述定理可以看出 $C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 的支撑树数只渐近依赖于 $k$．

**定理 2**　对有向循环图 $C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$，有

$$\lim\frac{1}{k}\sqrt[p]{T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))}=1,\ p\to\infty.$$

**证**　由定理 1，又 $f(1)=s_1+s_2+\cdots+s_k-k\geqslant 1$ 在 $k$ 固定时对 $p$ 线性，故 $\sqrt[p]{f(1)}\to 1$，$p\to$

$\infty$,即可得到本定理.

$C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$为有向 Euler 图,为计算其(有向)Euler 环游,有

**引理 6**[5,6] 设 $D$ 为 $k$-正则且具 $p$ 个顶点的有向图,则其 Euler 环游数

$$E(D) = T'(D)((k-1)!)^p,$$

此处 $T'(D)$为 $D$ 的以任一顶点为根的支撑(有向)树数(此数不依赖于根的选取).

**定理 3** 设 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$为循环有向图,则其 Euler 环游数有下述渐近性质:

$$\lim \frac{1}{k!}\sqrt[p]{E(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))} = 1, \ p \to \infty.$$

**证** 对 $k$ 正则有向图 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$,有 $T'(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)) = \frac{1}{p}T(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))$,由定理 1 有

$$T'(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)) \sim \frac{1}{f(1)}(k)^p, \ p \to \infty.$$

由引理 6 有

$$E(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)) \sim \frac{1}{f(1)}(k!)^p, \ p \to \infty.$$

类似于定理 2 可证本定理.

以下转而考虑 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$的叠线图,已知有

**引理 7**[6] 设 $D$ 为 $k$-正则有向图且具有顶点数 $p$, $L^r(D)$为其 $r$ 重叠线图,则其支撑树数为

$$T(L^r(D)) = k^{pk^r - p}T(D),$$

其中 $T(D)$为 $D$ 的支撑树数.

用证明定理 2 和 3 的方法不难证明

**定理 4** 设 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$为有向循环图, $L^r(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k))$为其 $r$ 重叠线图,则其支撑树数与 Euler 环游数有下述渐近性质:

$$\lim \frac{1}{k^{k^r}}\sqrt[p]{T(L^r(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)))} = 1, \ p \to \infty.$$

$$\lim \frac{1}{(k!)^{k^r}}\sqrt[p]{E(L^r(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)))} = 1, \ p \to \infty.$$

## 3 无向循环图

与有向循环图一样,无向循环图也广泛应用于计算机网络[2,3],现考虑其支撑树的渐近计数问题. 由于证明类似,略去一些细节. 首先回顾一些定义(本节循环图均无向).

循环图 $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$的顶点是标号为模 $p$ 的整数集的图,每一顶点 $i$ 到 $i \pm s_1$, $i \pm s_2, \cdots, i \pm s_k$ 有边,此处 $1 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_k \leqslant p/2$. 易见当 $s_k < p/2$ 时, $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$为 $2k$-正则图,否则为$(2k-1)$-正则图.

**引理 8** $C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$的特征多项式为

$$\chi(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k),\lambda)=\begin{cases}\prod\limits_{j=0}^{p-1}(\lambda-\varepsilon^{s_1j}-\cdots-\varepsilon^{s_kj}-\varepsilon^{(p-s_1)j}-\cdots-\varepsilon^{(p-s_k)j}), & s_k<\dfrac{p}{2},\\ \prod\limits_{j=0}^{p-1}(\lambda-\varepsilon^{s_1j}-\cdots-\varepsilon^{s_kj}-\varepsilon^{(p-s_1)j}-\cdots-\varepsilon^{(p-s_{k-1})j}), & s_k=\dfrac{p}{2}.\end{cases}$$

此即文献[9]的结果(记号略有不同).

**引理 9**[9]　具有 $p$ 个顶点的 $k$-正则图 $\Gamma$, 其支撑树数为

$$T(\Gamma)=p^{-1}\chi'(\Gamma,k),$$

其中 $\chi'(\Gamma,k)$ 为图 $\Gamma$ 的特征多项式的导数在 $x=k$ 时的值.

**引理 10**　$C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 的支撑树数为

$$T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))=\begin{cases}\dfrac{1}{p}\prod\limits_{j=1}^{p-1}(2k-\varepsilon^{s_1j}-\cdots-\varepsilon^{s_kj}-\varepsilon^{(p-s_1)j}-\cdots-\varepsilon^{(p-s_k)j}), & s_k<\dfrac{p}{2},\\ \dfrac{1}{p}\prod\limits_{j=1}^{p-1}(2k-1-\varepsilon^{s_1j}-\cdots-\varepsilon^{s_kj}-\varepsilon^{(p-s_1)j}-\cdots-\varepsilon^{(p-s_{k-1})j}), & s_k=\dfrac{p}{2}.\end{cases}$$

类似引理 4 的计算可得

**引理 11**　$C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 为循环图, 令

$$f(z)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{s_1-1}z^i+\sum\limits_{i=0}^{s_2-1}z^i+\cdots+\sum\limits_{i=0}^{s_k-1}z^i+\sum\limits_{i=0}^{p-s_1-1}z^i+\sum\limits_{i=0}^{p-s_2-1}z^i+\cdots+\sum\limits_{i=0}^{p-s_k-1}z^i, & s_k<\dfrac{p}{2},\\ \sum\limits_{i=0}^{s_1-1}z^i+\sum\limits_{i=0}^{s_2-1}z^i+\cdots+\sum\limits_{i=0}^{s_k-1}z^i+\sum\limits_{i=0}^{p-s_1-1}z^i+\sum\limits_{i=0}^{p-s_2-1}z^i+\cdots+\sum\limits_{i=0}^{p-s_{k-1}-1}z^i, & s_k=\dfrac{p}{2}.\end{cases}$$

假若 $f(z)$ 有根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 其中 $n=p-s_1-1$, 则其支撑树数

$$T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))=\frac{(-1)^{(p-1)(p-s_1-1)}}{f(1)}\prod_{i=1}^{p-s_1-1}(1-\alpha_j^p).$$

**引理 12**　$f(z)$ 定义如引理 11. 若最大公约数 $(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$, 则 $f(z)$ 各根之绝对值均大于 1.

**定理 5**　设 $C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 为循环图. 若 $(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$, 则其支撑树数

$$T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))\sim\begin{cases}(2k)^p/f(1), & s_k<p/2,\\ (2k-1)^p/f(1), & s_k=p/2,\end{cases}\qquad p\to\infty.$$

**定理 6**　若 $(s_1,s_2,\cdots,s_k)=1$, 则 $C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k)$ 有渐近式

$$\left.\begin{aligned}&\lim\frac{1}{2k}\sqrt[p]{T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))}=1,\quad s_k<\frac{p}{2},\\ &\lim\frac{1}{2k-1}\sqrt[p]{T(C(p,s_1,s_2,\cdots,s_k))}=1,\quad s_k=\frac{p}{2},\end{aligned}\right\}\quad p\to\infty.$$

证明中只需注意到 $1\leqslant f(1)<2kp$, 从而 $\sqrt[p]{f(1)}\to1\ (p\to\infty)$ 即可.

以下进一步考虑循环图叠线图的支撑树数的渐近性质. 首先回忆其定义. 图 $\Gamma$ 的线图的顶点定义为 $\Gamma$ 的边, 两个顶点相邻当且仅当对应的边有公共顶点, 类似于有向情形可定义其叠线图. 若 $\Gamma$ 是 $d$ 正则图, 并记其线图为 $L(\Gamma)$, 则有

**引理 13**[9]　设 $\Gamma$ 的支撑树数为 $T(\Gamma)$, 则其线图的支撑树数为

$$T(L(\Gamma))=2^{q-p+1}d^{q-p-1}T(\Gamma),$$

此外 $q$ 与 $p$ 分别是 $\Gamma$ 的边数与顶点数, $d$ 为其正则度.

**定理7** 设 $\Gamma$ 是 $p$ 个顶点的 $d$-正则图,其支撑树数为 $T(\Gamma)$,则其 $r$ 重叠线图的支撑树为

$$T(L^r(\Gamma)) = (2d)^{\frac{1}{2}pd\left(\prod_{i=1}^{r}(2^{i-1}d-2^i+1)-1\right)}(2/d)^r T(\Gamma).$$

**证** 易见 $L(\Gamma)$ 为 $2d-2$ 度正则, $pd/2$ 个顶点, $pd(d-1)/2$ 条边的图,利用归纳法易证 $L^n(T)$ 为 $2^n d-2^{n+1}-2$ 度正则图. 设其顶点数为 $v_k$,则易见有递推式

$$v_{n+1} = (2^{n-1}d - 2^n + 1)v_n.$$

注意到 $v_{n+1}$ 又是 $L^n(\Gamma)$ 的边数,由 $v_1 = pd/2$ 递推有

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}pd\prod_{i=1}^{n}(2^{i-1}d - 2^i + 1).$$

进而由引理13递推有

$$T(L^r(\Gamma)) = 2^{v_{r+1}-v_r+1}d^{v_{r+1}-v_r-1}2^{v_r-v_{r-1}+1}d^{v_r-v_{r-1}-1}\cdots 2^{v_2-v_1+1}d^{v_2-v_1-1}T(\Gamma) = (2d)^{v_{r+1}-v_1}\left(\frac{2}{d}\right)^r T(\Gamma).$$

将 $v_{n+1}$ 中 $n$ 代为 $r$,与 $v_1 = pd/2$ 一同代入上式中,即证得定理.

**定理8** 设 $\Gamma = C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)$ 为 $d$ 度循环图,其中 $(s_1, s_2, \cdots, s_k) = 1$,则其 $r$ 重叠线图的支撑树数有下述渐近性质:

$$\sqrt[p]{T(L^r(C(p, s_1, s_2, \cdots, s_k)))} \sim d(2d)^{\frac{1}{2}d\left(\prod_{i=1}^{n}(2^{i-1}d-2^i+1)-1\right)},\ p \to \infty,$$

此处

$$d = \begin{cases} 2k, & s_k \neq p/2, \\ 2k-1, & s_k = p/2. \end{cases}$$

**证** 由于 $r$ 为定数,故有

$$\sqrt[p]{(2/d)^r} \to 1,\ p \to \infty.$$

故由定理5与7经简单计算即可证明本定理之结论.

**注1** 当条件 $(s_1, s_2, \cdots, s_k) = 1$ 不满足时,定理1(因而定理3,4和8)不成立. 事实上,易选择 $p_n \to \infty$, $n \to \infty$,使得 $C(p_n, s_1, s_2, \cdots, s_k)$ 均不连通从而有 $T(C(p_n, s_1, s_2, \cdots, s_k)) = 0$ 对任意 $n$ 成立.

**注2** 文献[12]研究了 $C(p, 1, q)$ 的情形,但方法不同,且那里的方法无法推广到一般情形.

下述问题尚未解决:

**问题1** $d$-循环有向图的支撑树数与Euler环游数的渐近行为. 此处 $d$-循环有向图是指其邻接矩阵为 $d$-循环矩阵的图[13]. $d$-循环图的一个特别情形称为广义De Bruijn图[14,15],其支撑树数与Euler环游数已由文献[16]确定.

**问题2** 确定循环图叠线图的Euler环游数.

## 参 考 文 献

1 Wong C K, Coppersmith D A. A combinatorial problem related to multimode memory organization. J Assoc Comput Mach,

1974, 21: 392~402

2 Bermond J C, Comellas F, Hsu D F. Distributed loop computer networks: A survey. J Parallel and Distribution Computing, 1995, 24: 2~10

3 Bermond J C, ed. Interconnected Network Special Issue in Discrete Applied Mathematics 37/38. Amsterdam: Elsevier Science, 1992

4 Fiol M A, Yebra J L A. Line digraph iteration and the $(d, k)$ digraph problem. IEEE Trans on Computers, 1984, C-33: 400~403

5 Chen W K. Applied Graph Theory. Amsterdam: North-Holland, 1971

6 Zhang H, Zhang F, Huang Q. On the number of spanning trees and Eulerian tours in iterated line digraphs. Discrete Appl Math, 1997, 73: 59~67

7 Cheng C. Maximizing the number of spanning trees in a graph: two related problems in graph theory and optimum design theory. J Combin Theory, Ser B, 1981, 30: 240~248

8 Lovasz L, Plummer M D. Matching Theory. Amsterdam: North-Holland, 1986

9 Biggs N. Algebraic Graph Theory. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1974

10 Zhang F J, Lin G N. The complixity of digraphs. In: Capobianco M F, Guan M, Hsu D F, eds. Graph Theory and Its Applications East and West. Annal of New York Academy of Science, 576. New York: The New York Academy of Science, 1989. 171~180

11 Jacobson N. Basic Algebra I. San Francisco: W H Freeman and Company, 1974

12 Yong X R, Zhang F J. An asymptotic property of the number of spanning trees of double fixed step loop networks. Appl Math JCU, 1997, 12B: 233~236

13 Ablow C M, Brenner J L. Roots and canonical form for circulant matrices. Trans Amer Math Soc, 1963, 107(2): 360~376

14 Imase M, Itoh M. Design to minimize diameter on building block networks. IEEE Trans Computers, 1981, C30: 439~442

15 Imase M, Itoh M. A design for directed graph with minimum diameter. IEEE Trans Computers, 1983, C32: 782~784

16 Li X L, Zhang F J. On the number of spanning trees and Euler tours in generalized de Bruijn graphs. Discrete Mathematics, 1991, 94: 189~197